

Практикум

Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности на примере сферического течения

Куэтта.

ВВЕДЕНИЕ.

Возникновение турбулентности в гидродинамических течениях представляет собой одну из фундаментальных проблем механики. Согласно современным представлениям, переход к турбулентности с ростом управляющего параметра (например, числа Рейнольдса) происходит через последовательность бифуркаций. Эту последовательность бифуркаций принято называть сценарием перехода к турбулентности. Бифуркации соответствует переход от одного режима течения к другому. Первый из этих переходов - потеря устойчивости стационарного движения жидкости. Одним из наиболее распространенных подходов к изучению всей последовательности бифуркаций являются экспериментальные исследования переходов от ламинарных режимов течения к турбулентным в замкнутых модельных течениях, а именно, по терминологии [1], «в гидродинамических движениях в ограниченных объемах». Именно к таким модельным течениям относится рассматриваемое в данной задаче сферическое течение Куэтта.

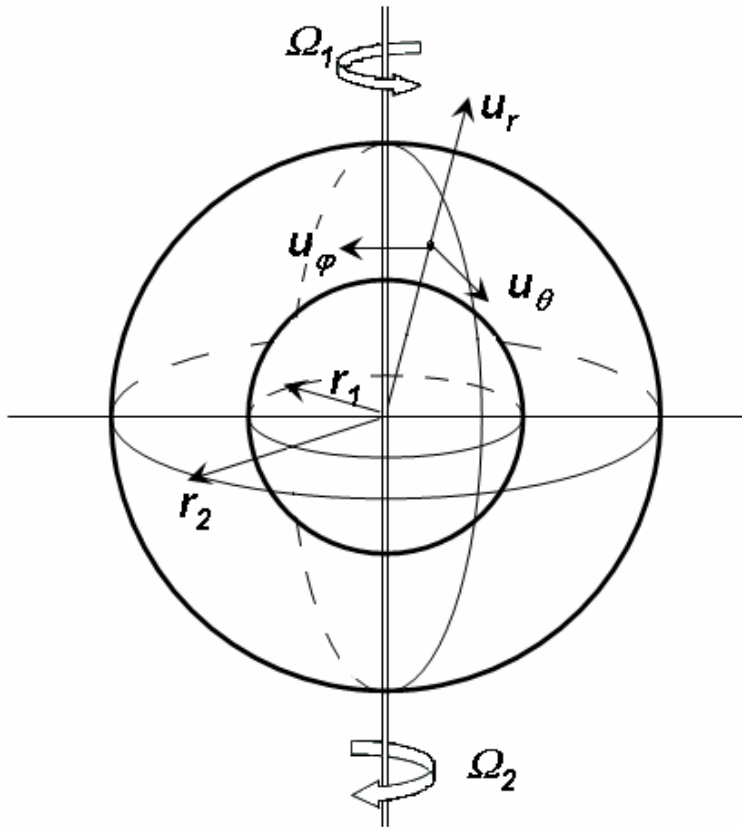
ЦЕЛЬ ЗАДАЧИ.

Получение общих представлений о сценариях перехода к турбулентности в замкнутых гидродинамических течениях и способах экспериментального изучения таких сценариев.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.

Хорошо известны два предельных случая движения жидкости: при очень малых числах Рейнольдса наблюдаются, как правило, стационарные течения; при больших числах Рейнольдса – турбулентные течения. Как уже отмечалось во введении, переход от стационарного режима течения к турбулентному происходит через последовательность бифуркаций. В замкнутых течениях бифуркации могут представлять собой скачкообразный переход от одного режима течения к другому с соответствующими изменениями пространственной структуры, частотных и других характеристик течения. Первый такой переход (или первая бифуркация) связан с потерей устойчивости стационарным движением жидкости. Под устойчивостью в гидродинамике понимается восприимчивость течения к возмущениям заданного вида. Принято считать, что течение остается устойчивым по отношению к возмущениям заданного вида в том случае, если внесенные возмущения с течением времени затухают, и течение возвращается к своему прежнему состоянию. Если же внесенные возмущения с течением времени нарастают, и течение переходит в другое состояние, то именно этот процесс называется гидродинамической неустойчивостью. Минимальное число Рейнольдса, при котором течение теряет устойчивость по отношению к какому-либо возмущению, соответствует границе устойчивости. В свою очередь, возмущения условно принято разделять на бесконечно малые (амплитуды которых малы до такой степени, что их наложение на исходное течение не меняет его осредненные во времени характеристики) и конечно-амплитудные. Течение, неустойчивость в котором развивается под влиянием бесконечно малых возмущений, принято называть системой с мягким возбуждением, а под влиянием конечно-амплитудных возмущений – системой с жестким возбуждением. В последнем случае наблюдается гистерезис, т.е. положение границы устойчивости зависит от направления изменения числа Рейнольдса: его увеличения или уменьшения. В данной задаче рассматриваются потеря устойчивости и переход к турбулентности в сферическом течении Куэтта.

Сферическим течением Куэтта (СТК) принято называть течение вязкой несжимаемой жидкости в слое между двумя коаксиальными концентрическими сферами, возникающее под действием соосно вращающихся границ (с постоянными, но различными скоростями). СТК является замкнутым гидродинамическим течением. Геометрия течения представлена на фиг.1. r_1 и r_2 - радиусы внутренней и внешней сферических границ, Ω_1 и Ω_2 - их угловые скорости вращения (1 - внутренней, 2 - внешней).



Фиг. 1

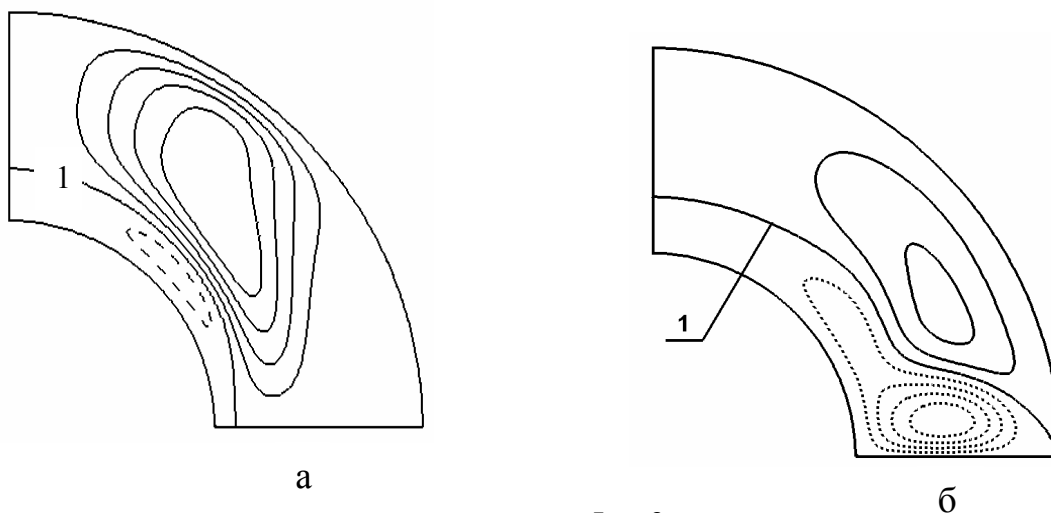
Течение характеризуется тремя параметрами подобия (или управляющими параметрами): это числа Рейнольдса для внутренней $Re_1 = \Omega_1 r_1^2 / \nu$ и внешней $Re_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu$ границ слоя, а также относительная толщина слоя $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$ [2]. Здесь ν - кинематическая вязкость жидкости в слое. Иногда вместо Re_2 используют отношение угловых скоростей вращения границ слоя $\omega = \Omega_2 / \Omega_1$, в этом случае индекс у числа Рейнольдса для внутренней сферы опускают.

Основное течение

При относительно малых числах Рейнольдса формируется основное течение – единственное стационарное течение, к которому при $t \rightarrow \infty$ стремятся все нестационарные течения с любыми начальными данными. Существование такого стационарного течения возможно лишь при ограниченных значениях числа $Re < Re_G$. Для СТК Re_G зависит от значений двух других параметров δ и ω : $Re_G = Re_G(\delta, \omega)$. Отсутствие аналитического решения даже для основного течения значительно усложняет изучение течения во вращающихся сферических слоях. Отметим, что до настоящего времени большая часть закономерностей для СТК была установлена в результате экспериментальных исследований, численный анализ, как правило, опирается на сравнение с ранее полученными экспериментальными результатами [2,3].

Основное течение в сферическом слое симметрично относительно плоскости экватора и оси вращения и включает в себя дифференциальное вращение вокруг оси и меридиональную циркуляцию. Амплитуда и форма меридиональной циркуляции определяются относительной толщиной слоя δ и соотношением чисел Re_1 и Re_2 . Для описания СТК естественно использовать сферическую систему координат (r, θ, φ) , оси вращения соответствует $\theta = 0$. Основное течение в СТК не зависит от азимутальной координаты φ , но зависит от двух других координат r и θ , и имеет все три компоненты скорости u_r, u_θ, u_φ (фиг.1). Последнее означает, что в СТК всегда присутствует меридиональная циркуляция.

При вращении только одной из сферических границ меридиональная циркуляция одновихревая, направление циркуляции от полюса к экватору вдоль вращающейся сферической границы. При вращении сферических границ в противоположных направлениях возможно образование течения с двумя вихрями, внутренним и внешним, причем вдоль каждой сферической границы сохраняется то же направление циркуляции, что и при вращении только одной сферы. В этом случае в сферическом слое существует поверхность раздела (кривая 1 на фиг.2 а,б), которая разграничивает в радиальном направлении области течения с разнонаправленной меридиональной циркуляцией. Эта поверхность на всем своем протяжении может быть удалена от обеих сферических границ, как на фиг.2,а, а может на некотором участке совпадать с одной из границ. Например, как на фиг.2,б, касаться внешней сферы на экваторе.



Фиг.2

Вторичные течения.

Интенсивность меридиональной циркуляции сильно зависит от относительной толщины слоя δ , и это оказывает существенное влияние на устойчивость течения. По виду вторичного течения

на пределе устойчивости при вращении только внутренней сферической границы ($Re_2 = 0$) сферические слои условно принято разделять на тонкие и толстые (вторичное течение – течение возникающее после потери основным течением устойчивости).

Тонкие слои.

В тонких слоях при вращении только внутренней сферической границы относительно малая интенсивность меридиональной циркуляции (а) в приэкваториальной области по сравнению с азимутальным вращением приводит к образованию условий течения, аналогичных условиям

цилиндрическом течении Куэтта (ЦТК). На пределе устойчивости может образоваться стационарное

осесимметричное вторичное течение в виде пары кольцевых вихрей Тейлора вблизи экватора (б), с оттеснением основной меридиональной циркуляции от экватора к полюсам.

Циркуляция в одной паре вихрей Тейлора направлена вдоль экватора от неподвижной внешней сферической границы к вращающейся внутренней.

Вихри имеют почти прямоугольное поперечное сечение, и на пределе устойчивости отношение

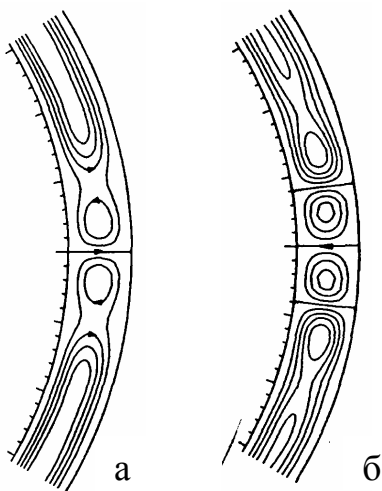
ширины вихря к толщине слоя, называемое относительной

длиной волны, как правило, меньше единицы.

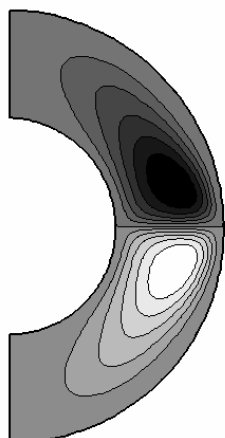
Возможность существования кольцевых вихрей Тейлора в сферических слоях при квазистатическом увеличении числа Re подтверждена экспериментально вплоть до относительной толщины сферического слоя $\delta \leq 0.25$. Расчеты показали, что вторичное течение в тонких слоях образуется в результате нестационарного переходного режима и, так же, как и основное течение, симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора. Переход к вторичному течению в тонких сферических слоях может сопровождаться гистерезисом, не превышающим 0.08% для $\delta = 0.1096$, и возрастающим с увеличением относительной толщины слоя δ . Гистерезис был получен как в расчетах, так и в экспериментах.

Толстые слои.

В толстых слоях при вращении только внутренней сферической границы интенсивность меридиональной циркуляции существенно больше, чем в тонких слоях при тех же числах Re . С возрастанием Re меридиональная циркуляция меняется качественно: на сферических границах образуются пограничные слои, интенсивность циркуляции возрастает, ее центр смещается в сторону плоскости экватора. Интенсивная меридиональная циркуляция деформирует



азимутальную составляющую скорости, и это может служить причиной потери устойчивости основного течения.



Экспериментально установлено, что в толстых сферических слоях $0.54 \leq \delta \leq 1.33$ при вращении только внутренней сферической границы вторичное течение на пределе устойчивости неосесимметрично и несимметрично относительно плоскости экватора. Оно представляет собой периодическое по времени и азимутальной координате φ волновое движение с одной частотой в спектре, состоящее из равного числа вихрей m в каждой полусфере. Вихри в верхней и нижней полусферах смещены один относительно другого, что приводит к синусообразному возмущению границы раздела течений в верхней и нижней полусферах. Вся картина

течения распространяется в азимутальном направлении со скоростью, зависящей в основном от относительной толщины слоя (и слабо зависящей от числа Re_1), и отстающей от скорости вращения внутренней сферической границы. Азимутальное волновое число m на пределе устойчивости уменьшается с возрастанием относительной толщины слоя. Потеря устойчивости основным течением при возрастании числа Re и обратный переход от вторичного течения к основному, в отличие от тонких слоев, происходит без гистерезиса.

Слой $\delta = 1.006$ впервые был подробно исследован на установке «Шар» Института механики МГУ Беляевым Ю.Н. с сотрудниками [4]. Ими было определено критическое значение числа $Re_c = 460 \pm 2$, соответствующее потере устойчивости основным течением, и азимутальное волновое число на пределе устойчивости $m = 4$.

Вращение обеих границ.

При вращении обеих границ возможно большое разнообразие пространственных структур вторичных течений. Для фиксированного значения относительной толщины слоя вид течения определяется направлением и отношением скоростей вращения сферических границ.

Переход к турбулентности в сферическом течении Куэтта.

Прежде чем рассматривать сценарии перехода к турбулентности, необходимо разобраться, как можно количественно охарактеризовать различные режимы течения. По визуализации структуры течения, строго говоря, можно дать единственный ответ – является течение стационарным или нет. Выходом является измерение какой либо физической величины в потоке жидкости (температуры, скорости). Запись результатов измерения в течение некоторого времени позволяет получить временной ряд, на основе анализа которого можно получить характеристики исследуемого течения. Совершенно ясно, что с увеличением числа

Рейнольдса зависимость измеряемой величины от времени становится все менее регулярной. Одним из самых известных способов анализа временного ряда является преобразование Фурье, результат которого можно представить в виде спектра - зависимости амплитуд (или квадратов амплитуд) коэффициентов Фурье от частоты. В случае синусоидальной зависимости физической величины от времени в спектре будет присутствовать один пик на частоте f , соответствующей частоте синусоиды; в спектре любой периодической функции, отличной от синусоидальной, кроме пика на частоте f будут наблюдаться пики на ее высших гармониках: $2f$, $3f$, и т.д. В обоих случаях полученный спектр называют одночастотным, т.к. в нем присутствует только одна независимая частота. Именно составом и видом спектра можно характеризовать режим течения. Какой спектр будут иметь рассмотренные выше вторичные течения, образующиеся в тонких и толстых слоях при вращении только внутренней границы? В тонких слоях образуются кольца Тейлора, этот режим течения стационарный, поэтому результатом измерения скорости в любой точке потока будет не зависящая от времени постоянная. В спектре такого временного ряда будет пик на нулевой частоте, указывающий на наличие среднего ненулевого значения членов ряда. В толстых слоях устанавливается периодический по времени режим течения, поэтому в спектре (кроме пика на нулевой частоте, отражающего наличие ненулевого среднего) будет наблюдаться пик на частоте f , соответствующей периоду изменения скорости и возможно пики на гармониках этой частоты. Таким образом, будет определена частота f . По мере дальнейшего увеличения числа Рейнольдса зависимость скорости от времени становится более сложной, в спектре появляются все новые пики. В спектре турбулентного режима течения все частоты, как правило, имеют ненулевые амплитуды.

Первый сценарий развития турбулентности в виде бесконечной иерархии бифуркаций в гидродинамических течениях был предложен Л.Д. Ландау [1]. Согласно этой теории предполагалось, что с превышением управляющим параметром (например, числом Re) критического значения основное течение теряет устойчивость по отношению к возмущению с некоторой частотой ω_1 и случайной фазой φ_1 , определяемой начальными данными задачи. С возрастанием надкритичности течение вновь теряет устойчивость по отношению к новому возмущению с частотой ω_2 и случайной фазой φ_2 , и т.д. В результате может образоваться течение с бесконечным набором фиксированных частот ω_k и случайных фаз φ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) наряду с их суммарными и разностными комбинациями. Как оказалось, этот сценарий может реализоваться только в своей начальной стадии при формировании течения, содержащего ограниченное и малое число частот.

Позже получили развитие новые подходы к механизму образования турбулентности, основанные на положениях теории динамических систем. К настоящему времени хорошо известны по крайней мере три типичных пути развития турбулентности. 1) Ruelle'ем и

Takens'ом был предложен сценарий перехода к турбулентности, согласно которому стохастичность может развиваться после конечной и небольшой последовательности бифуркаций. В соответствии с этим сценарием, переход к устойчивому квазипериодическому режиму с более чем тремя несоизмеримыми частотами в динамической системе невозможен, но возможно образование в фазовом пространстве динамической системы «странного аттрактора» - притягивающего множества, на котором неустойчивы все фазовые траектории. Эти траектории ведут себя случайным образом, а их частотные спектры являются непрерывными. 2) Другой сценарий перехода к хаосу, сценарий Feigenbaume'a, - переход через последовательность бифуркаций удвоения периода. Согласно этому сценарию, после потери устойчивости течением (при некотором значении $Re^{(1)}$) и образования периодического режима с частотой ω_1 , возникает вторая бифуркация (при значении $Re^{(2)}$) с переходом к удвоенному периоду $1/2 \omega_1$, и т.д. При этом последовательность бифуркационных значений управляющего параметра сходится: при $k \rightarrow \infty \quad \lim (R^{(k)} - R^{(k-1)}) / (R^{(k+1)} - R^{(k)}) = 4.669201\dots$ 3) Третий сценарий, исследованный для диссипативных динамических систем, связан с явлением перемежаемости, при котором регулярное поведение системы во времени прерывается промежутками нерегулярного поведения (Pomeau, Manneville). С увеличением управляющего параметра средняя частота появления регулярного поведения уменьшается и при некотором его значении регулярное поведение системы полностью исчезает.

К настоящему времени эти сценарии общего характера получили экспериментальное и теоретическое подтверждение для ряда гидродинамических течений. Заметим, что для одного и того же течения, как показывают результаты численного и физического эксперимента, могут быть реализованы различные сценарии перехода к турбулентности. Поэтому вопрос о зависимости сценария перехода от определяющих параметров течения, и в особенности при более чем одном управляющем параметре, остается до сих пор актуальным.

УСТАНОВКА «ШАР» ИНСТИТУТА МЕХАНИКИ МГУ.

Сферический слой в установке образуется зазором между внешней сферической поверхностью внутренней сферы (внутренняя граница слоя) и внутренней сферической поверхностью внешней сферической оболочки (внешняя граница слоя). Зазор заполняется рабочей жидкостью - оптически прозрачным раствором силиконовых масел ПМС. Оптически прозрачные внутренняя сфера и внешняя оболочка подвешены на соосных вертикальных валах и приводятся в движение независимыми приводами. Относительная толщина сферического слоя вычисляется по размерам внутренней и внешней границ. Средний диаметр внутренней границы составляет 149,63 мм, внешней – 300,16. Нетрудно вычислить относительную толщину

слоя $\delta = (r_2 - r_1) / r_1 = 1,006$. Установка является прецизионной, т.е. выполненной с высокой точностью. Это видно из следующих характеристик:

- положение геометрических осей валов подвески сфер совпадает в пределах $\pm 0,01$ мм, при этом радиальное биение установленной на валу внутренней сферы не превышает $\pm 0,02$ мм;
- отклонения геометрических размеров внешней и внутренней границы от номинальных значений не превышают соответственно $\pm 0,03$ мм и $\pm 0,02$ мм для экваториальных диаметров и $\pm 0,07$ мм и $\pm 0,05$ мм - для полярных диаметров;
- совмещение геометрических центров внутренней сферы и внешней оболочки обеспечивается возможностью смещения внутренней сферы относительно внешней вдоль оси вращения, и измерением величины этого смещения катетометром КМ-6 с точностью не менее $\pm 0,01$ мм;
- рабочая часть внешней сферы помещена в оптически прозрачный кубический термостат с маслом, который является частью системы температурной стабилизации в слое и за счет снижения уровня вертикальной весовой нагрузки на внешнюю оболочку исключает деформацию сферического слоя.

Для обеспечения стационарности граничных условий течения в сферическом слое используются системы измерения, управления и стабилизации скорости вращения сфер и стабилизации температуры рабочей жидкости в слое. Все системы обеспечивают неизменность характеристик с точностью 0.03%.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА.

Целью экспериментов является исследование устойчивости течений и перехода к хаотическим режимам течений. Наиболее наглядными являются визуальные наблюдения за структурой течения, для этого в рабочую жидкость добавляют светорассеивающие примеси, например, алюминиевую пудру. При освещении такой суспензии интенсивность рассеянного света сильно зависит от концентрации светорассеивающих частиц, их ориентации относительно источника подсветки и направления наблюдения.

Если в толстом слое сделать жидкость не прозрачной, то по изменению внешней поверхности течения также можно будет судить о перестройке режимов течения, но невозможно будет наблюдать его пространственную структуру. Это одна из причин, по которой в слой $\delta = 1,006$ добавлено небольшое количество пудры (менее 0.002% по объему).

Кроме визуальных наблюдений, конечно, хотелось бы иметь и количественные характеристики различных режимов течения.

Основным методом определения частотных характеристик различных режимов течения является измерение и последующий анализ пульсаций скорости течения.

На установке «Шар» для измерения пульсаций скорости используется лазерный Допплеровский измеритель скорости (ЛДИС). При таком способе измерения в поток не вносятся возмущения, которые неизбежно возникают при помещении даже миниатюрного датчика в поток. В качестве источника когерентного неполяризованного излучения используется одномодовый He-Ne лазер мощностью около 25мВт. В оптической схеме измерения использован метод двойного луча с прямым рассеянием, обеспечивающий в данных условиях максимально возможное соотношение сигнал-шум. В этом методе источник излучения и приемник расположены по разные стороны точки измерения. Исходящий из источника лазерный луч с помощью оптического расщепителя разделяется на два параллельных, когерентных луча, которые затем фокусируются в точке измерения. В точке измерения (пересечения) они создают систему интерференционных полос, образующую измерительный объем. В такой схеме измеряется проекция скорости течения на прямую, лежащую в плоскости расщепленных лучей и перпендикулярную оси описанной оптической системы (источник излучения - точка измерения). Свет, рассеянный частицами, пересекающими измерительный объем, модулируется частотой, пропорциональной скорости их движения (эффект Доплера) и собирается на фотоумножителе. Выделяя из принимаемого сигнала доплеровскую частоту, можно определять указанную проекцию скорости течения, в предположении, что частицы повторяют движение жидкости.

Добавление небольшого количества алюминиевой пудры в рабочую жидкость позволило совместить визуализацию течения и измерения пульсаций скорости с помощью ЛДИС.

Сигнал с ЛДИС поступает на вход 12-разрядного аналого-цифрового преобразователя (АЦП), расположенного на встроенной в РС плате. АЦП преобразует полученный с ЛДИС аналоговый сигнал (со временем преобразования не более 2 мкс) во временной цифровой ряд с заданным постоянным шагом во времени, который записывается на жесткий диск компьютера с целью дальнейшей обработки.

Время дискретизации сигнала должно выбираться так, чтобы частота опроса была не менее чем на порядок больше ожидаемой частоты исследуемого процесса.

Экспериментально было установлено, что время переходных процессов, т.е. то время за которое после изменения управляющих параметров устанавливается новый режим течения, для СТК в слое $\delta = 1.006$ составляет приблизительно 15 минут. Поэтому при проведении экспериментов важно выдерживать каждый новый режим течения в течение не менее 15 минут перед тем как проводить измерения.

Самой простой оценкой точности определения частот в спектре пульсаций скорости является величина, обратная длине выборки $\Delta f = 1/Ndt$. Эту величину можно использовать в

качестве грубой оценки погрешности при определении частот. Характерная величина Δf для настоящей работы ($N = 16384$, $dt = 0,05$ с) составляет около 0,001 Гц.

Очень важным при исследовании СТК является последовательность и скорость изменения управляющих параметров, поскольку волновые числа вторичного течения как в тонких, так и в толстых слоях могут зависеть от предыстории его развития, например от величины ускорения dRe/dt , предшествующей установлению выбранной величины Re . Для получения устойчивых, воспроизводимых результатов необходимо квазистатически изменять управляющие параметры Re_1 и Re_2 , что означает обязательное присутствие участков $dRe/dt=0$ во временной зависимости управляющих параметров.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.

Как уже отмечалось в разделе, посвященном методике проведения эксперимента, АЦП преобразует аналоговый сигнал ЛДИС во временной цифровой ряд с заданным постоянным шагом во времени dt или с частотой дискретизации $f_{discret} = 1/dt$, который записывается на жесткий диск компьютера с целью дальнейшей обработки. По временному ряду (выборке) можно определить спектр измеренной компоненты скорости. Для этого к выборке применяется преобразование Фурье. Т.к. ряд дискретный $x_n = x(t_0 + ndt)$, $n = 0, \dots, N-1$, то применяется дискретное преобразование Фурье:

$$X(f_k) = X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i \frac{2\pi}{N} kn) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i 2\pi f_k n dt), \quad k = 0, \dots, N - 1$$

здесь $f_k = \frac{1}{Ndt} k = k\Delta f, \quad \Delta f = \frac{1}{Ndt}$.

Сейчас все математические пакеты имеют в своей библиотеке программу быстрого преобразования Фурье. Применив такую программу к дискретному вещественному ряду x_n , $n = 0, \dots, N-1$, мы рассчитаем N комплексных значений X_k , $k = 0, \dots, N-1$ (только первые $N/2$ из них несут информацию). Спектром принято называть зависимость $|X_k|^2$ от f_k . Пики в спектре соответствуют частотам различных мод, их гармоникам и комбинациям. Например, в спектре скорости периодического режима течения будет наблюдаться пик на основной частоте f_p и пики на частотах высших гармоник $2f_p, 3f_p, \dots$. Наличие только одного пика в спектре указывает на то, что изменение скорости в точке измерения имеет форму близкую к синусоидальной.

ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СТК.

- 1) Провести визуальное наблюдение за течением при различных скоростях вращения сферических границ. Описать наблюдаемые структуры течения и определить отличия в структуре между основным и вторичным течением. Для вторичного течения после потери устойчивости пронаблюдать за периодичностью пространственной структуры течения и провести измерение ее периода секундомером.
- 2) Ознакомиться с принципом работы лазерного Допплеровского измерителя скорости.
- 3) Получить временную запись пульсаций скорости при выбранных значениях определяющих параметров Re_1 и Re_2 . Построить спектр исследуемого режима течения.
- 4) Сопоставить полученный спектр с визуальными наблюдениями, а именно сравнить величины выделенных частот в спектре сигнала с результатами измерений секундомером.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. т.6.:Гидродинамика.
2. Джозеф.Д. Устойчивость движений жидкости. М.:Мир, 1981.
3. Беляев Ю.Н. Гидродинамическая неустойчивость и турбулентность в сферическом течении Куэтта. Издательство Московского университета. 1997.
4. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.:Мир, 1990.
5. Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Show R. Geometry from a time series. Phys. Rev. Lett. 1980. V.45. №9. P.712-716.
6. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. Lect. Notes Math. 1981. №899. p.366-381.