МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ:

МЕХАНИКА

(010701.65 «Фундаментальная математика и механика»)

СБОРНИК ЗАДАЧ

Москва, 2012

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: МЕХАНИКА (010701.65 «Фундаментальная математика и механика»). Сборник задач.

Составители: А. С. Зеленский, Е. И. Могилевский, М. В. Юмашев.
Под общей редакцией Н. Н. Смирнова.

Учебное пособие представляет собой сборник задач для семинарских занятий по курсу «Введение в специальность» для студентов 1 курса отделения механики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Тексты большинства задач основаны на задачах, опубликованных в различных сборниках задач для школьников и студентов, и материалах олимпиад по механике и физике для школьников и студентов. Часть задач составили сотрудники факультета: С. И. Арафайлов, А. В. Звягин, А. С. Зеленский, А. Г. Калугин, Н. Е. Леонтьев, А. А. Малашин, Е. И. Могилевский, В. Л. Натяганов, В. А. Прошкин, Н. Н. Смирнов, О. Ю. Черкасов, М. В. Юмашев, А. Г. Якушев, Я. Д. Янков.

Содержание

«Механика есть рай математических наук,
посредством нее достигают математического плода».
Леонардо да Винчи

1 Предисловие

1.1 Несколько слов о механике

Во многих ведущих университетах России: Московском, Санкт-Петербургском, Казанском, Уральском, Нижегородском и т.д. нет математического факультета. Зато есть механико - математические или математико-механические. Почему же с точки зрения университетов механика оказывается ближе к математике, чем к физике? Какие специалисты выходят после обучения на механической части механико-математических факультетов?

Итак, механика... Не очень привычное слово для школьника. Когда произносятся слова «математика», «физика», «химия», вопросов почти ни у кого не возникает. А «механика» — слово многозначное. На производстве есть должности главного механика и инженера-механика. И машины ремонтируют тоже механики. Школьникам знакома механика, как раздел физики, посвященный движению тел под действием гравитационных сил, упругих сил и сил трения. Но та механика, которая изучается на механико - математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова и многих других вузов, — совсем другое. Наша механика — это математическое моделирование широкого класса явлений окружающего мира средствами классической механики Ньютона и релятивистской механики.

Именно в рамках такой механики активно работают ученые факультета, охватывая в своих исследованиях практически все сферы человеческой деятельности. Именно такая механика служит основой многих научных проектов, определяющих без преувеличения передовое положение нашей страны в таких областях, как авиа- и кораблестроение, освоение космоса, энергетика, добыча полезных ископаемых, робототехника, разработка новых оборонительных вооружений. Именно такой механике обучают студентов.

Для того, чтобы не путать эту область знаний с техническими специальностями, мы будем применять термин **фундаментальная механика**.

Механик университетского профиля, в отличие от механика-инженера, создает математические модели и ставит сложные математические задачи, связанные с различными механическими явлениями, а также разрабатывает общие методы их решения. Эти результаты потом используются инженерами-механиками как фундамент для конкретных разработок. К примеру, в 1936 году М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев с использованием сложного математического аппарата теории функций комплексного переменного решили задачу о движении подводного крыла. И через четверть века были созданы (этим занимались уже «механики-инженеры») корабли на подводных крыльях.

Для осознания важности механики как науки достаточно просто перечислить некоторые работы механиков Московского университета, произведенные в годы Великой Отечественной войны: решение проблемы флаттера самолета и «шимми переднего колеса» самолета (М.В. Келдыш); работы по аэродинамике крыла боевых самолетов (С.А. Чаплыгин, В.В. Голубев, М.А. Лаврентьев, Л.И. Седов, С.А. Христианович); устойчивость самолета при вынужденных посадках, устойчивость снарядов и мин при полете (Н.Г. Четаев); задача аэродинамики парашюта, математическая теория деформации гибкой нити при поперечном ударе, волны разгрузки (Х.А. Рахматуллин); технология изготовления корпусов артиллерийских снарядов и стволов артиллерийских орудий (А.А. Ильюшин); работы по механике тел переменной массы и реактивной динамике (А.А. Космодемьянский); математическая модель кумулятивного снаряда (М.А. Лаврентьев) и многие-многие другие. Отметим, что все эти выдающиеся научные результаты — это именно результаты ученых-механиков, которые применили свои блестящие математические знания к актуальным прикладным задачам.

Для современной механики характерно широкое привлечение самого разнообразного математического аппарата. А такие направления, как теория устойчивости, теория нелинейных колебаний, методы качественного анализа движения систем, выходят на такой уровень абстракции, что уже трудно сказать — механика это или математика.

Именно этим объясняется совместная подготовка специалистов по механике и математике на одном механико - математическом факультете, а также то, что общематематическая подготовка студентов, специализирующихся по механике, проводится в таком же объеме, как и студентов - математиков. Как справедливо отметил ректор МГУ В.А. Садовничий, «Сейчас требуется профессионал - математик — математический эрудит, универсал, который хорошо видит не только обширный математический мир, но и мосты, которые наведены или могут быть наведены с другими мирами знаний».

Механика изучает общие закономерности, связывающие движение и взаимодействие тел, находящихся в различных состояниях — твердом, жидком и газообразном. В соответствии с этим ее можно условно разделить на две части: механику абсолютно твердого тела и механику сплошной среды (которая в свою очередь включает в себя механику жидкости и газа и механику деформируемого твердого тела). На отделении механики механико - математического факультета МГУ имеется девять кафедр, на которых широко представлены все направления современной механики:

- Кафедра Теоретической механики и мехатроники;
- Кафедра Прикладной механики и управления;
- Кафедра Аэромеханики и газовой динамики;
- Кафедра Гидромеханики;
- Кафедра Газовой и волновой динамики;
- Кафедра Теории упругости;
- Кафедра Теории пластичности;
- Кафедра Механики композитов;
- Кафедра Вычислительной механики.

1.2 О задачах по механике

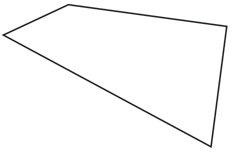
Слово «механика» происходит от греческого $\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa o\varsigma$ — умелый, изобретательный. Можно поэтому сказать, что механик — умелый, изобретательный математик. Известен шутливый афоризм: «Математик делает то, что можно, и так, как нужно. Механик делает то, что нужно, и так, как можно».

Когда на третьем курсе студенты начинают осваивать ту или иную механическую специализацию и решать соответствующие задачи, они сталкиваются обычно либо с необходимостью получать и затем исследовать те или иные дифференциальные уравнения, либо использовать аппарат теории функций комплексного переменного, либо какие-нибудь другие разделы высшей математики. Однако для того, чтобы получить самое первое представление о механике, можно обойтись и знаниями в объеме школьной программы. Мы считаем, что очень полезными как для общего развития будущего ученого-механика, так и для его дальнейшей профориентации, будет являться решение соответствующих задач по механике.

Задачи по механике построены таким образом, что элементы творческого мышления необходимо проявить уже на стадии математической формулировки задачи, понять необходимость и достаточность тех или иных приближений. После того, как задача математически сформулирована, ее решение потребует владения всем арсеналом математических знаний, доступных выпускнику школы. При этом какие-то задачи могут показаться сложными, но решать трудные задачи и получать от этого удовольствие — наверное, единственный путь развития творческих способностей в точных науках.

Рассмотрим, например, совсем простую задачу.

Задача 1. Сделав минимальное количество измерений, определите площадь железной пластины четырехугольной формы (см. рисунок) толщиной в 1 мм.

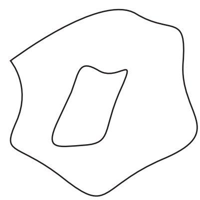


«Чистый» математик для определения площади, скорее всего, сделает три измерения: найдет длину одной из диагоналей четырехугольника и длины высот, опущенных на эту диагональ из двух вершин (для этого ему понадобятся циркуль и линейка с делениями). После этого площадь четырехугольника вычисляется как сумма площадей двух треугольников.

Математик-прикладник может поступить иначе. Он взвесит (!) пластину — всего одно измерение! После этого, разделив массу пластины на плотность железа 7,8 г/см^3, получит ее объем. Разделив объем на известную толщину, получит искомую площадь.

«Умелый» механик может обойтись в этой задаче даже без плотности — ведь в реальности она не всегда известна с достаточной точностью. Вспомнив величайшего ученого древности Архимеда, он опустит пластину в воду и, измерив массу вытесненной жидкости, получит сразу и объем — ведь плотность воды равна единице. Осталось разделить объем на толщину.

Преимущество двух последних способов решения перед первым особенно заметно, если нужно измерить площадь пластины сложной формы (см. рисунок). Возможен даже вырез в этой пластине. «Механические» методы по-прежнему «работают», математику же придется искать какое-то иное решение ...



Следующая задача посложнее.

Задача 2. Шарик массой 10 г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}V^2$, где V — значение модуля скорости тела в м/с. Вычислите приближенно, за какое время шарик пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

Для «математика» решить данную задачу — это значит решить обыкновенное дифференциальное уравнение, что возможно, но требует довольно богатого математического аппарата (не менее двух курсов мехмата).

В то же время «механик» может предложить следующее решение. Предположим, что на первом сантиметре пути сила сопротивления не существенна. Действительно, если бы ее совсем не было, то шарик приобрел бы скорость $V = \sqrt{2gh} \approx 0,45$ м/с (через h обозначен 1 сантиметр). При такой скорости сила сопротивления составляет $F = 2 \cdot 10^{-4}$ Н, что в 500 раз меньше силы тяжести. Таким образом, пользуясь формулой для скорости тела при свободном падении, получаем приближенно время, за которое шарик пролетит первый сантиметр $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,045$ с.

С увеличением скорости растет сила сопротивления движению. Существует скорость V_1, с которой шарик может двигаться равномерно. Найдем ее: $Mg = F \Rightarrow V_1 = 10$ м/с.

Такой скорости свободно падающее тело достигнет за 1 с. То есть, за одну секунду тело разгоняется почти до скорости V_1 и затем движется практически равномерно. Двигаясь со скоростью V_1, шарик пройдет один километр за 100 секунд. Видно, что время разгона много меньше этой величины. Таким образом, 100 секунд можно считать ответом. Ответ: 0,045 с; 100 с.

Имеются также задачи, которые можно решать и алгебраически, и геометрически, и физически. Такова, например, следующая задача.

Задача 3. Теплоход стоит на рейде на расстоянии 200 метров от прямолинейного берега и готовится к отплытию. Находящийся в момент времени 12:47 на расстоянии 1 400 метров от теплохода опаздывающий пассажир бежит по берегу вдоль набережной. А) Через какое минимально возможное время пассажир окажется на месте стоянки теплохода, если он может плыть со скоростью 4 км/час, а по суше передвигается вдвое быстрее? Б) Успеет ли он на теплоход, если теплоход отплывает в 13:00?

В этой задаче возможно и алгебраическое решение, основанное на получении функции времени и дальнейшем нахождении минимума этой функции средствами математического анализа, и очень изящное чисто геометрическое решение, и еще одно геометрическое решение, основанное на точке Ферма-Торричелли-Штейнера в треугольнике, и физическое решение, основанное на законах аналогии с распространением света и применении принципа Ферма.

Таким образом, в задаче по механике постановка задачи содержит описание некоторого события или процесса, математическую модель которого учащийся в состоянии построить. При решении полученной системы уравнений, как правило, должен быть использован серьезный (для данного момента обучения) математический аппарат. При этом получение решения обычно не означает окончания решения задачи в целом. Необходимо еще проанализировать ответ, выяснить при каких значениях параметров этот ответ соответствует здравому смыслу или каким-то более узким заданным условиям.

Безусловно, впереди у вас — решение больших и серьезных механических и других прикладных задач. Этим вы займетесь через некоторое время: на третьем и более старших курсах. Но как гласит китайская поговорка, «всякая дорога начинается с первого шага». Пусть же первыми вашими шагами на пути к вершинам механики будут находки и озарения при решении приведенных здесь интересных задач.

2 Закон сложения скоростей

2.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой системе отсчета, которую будем считать неподвижной (НСО). Пусть имеется еще одна система отсчета (ПСО), движущаяся относительно НСО поступательно.

Классический закон сложения скоростей — закон Галилея — определяет связь скоростей точки (Т) в неподвижной системе отсчета $\overrightarrow{W}$ — абсолютная скорость — и подвижной системе отсчета $\overrightarrow{V}$ — относительная скорость:

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U},$$

где $\overrightarrow{U}$ — скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной — переносная скорость.

Например, наблюдатель на берегу моря (НСО) следит за движением матроса (Т) на пароходе (ПСО). Если пароход движется со скоростью U относительно берега, а матрос идет по палубе со скоростью V относительно парохода в направлении движения парохода, то скорость матроса относительно берега W будет равна $W = U + V$. Если матрос идет против движения парохода, то скорость будет равна $W = U - V$. Если матрос идет поперек палубы, то его движение относительно берега будет описываться треугольником скоростей и величина скорости будет равна $W = \sqrt{V^2 + U^2}$.

Литература: [1] С. 13 —16, 28 — 34, 76 — 83; [3] С. 52 — 53; [4] С. 128 —137.

2.2 Задачи

2.1. Дирижабль прошел из пункта А в пункт Б расстояние 40 км против ветра (скорость ветра 30 км/ч), затем прошел этот же путь в обратном направлении, затратив в оба конца $2,5$ часа. Определить скорость дирижабля относительно воздуха.

2.2. Чайка, летящая навстречу лайнеру, покрывает путь от носа до кормы за 12 с. Затем она разворачивается и пролетает мимо лайнера за 60 с. За какое время лайнер пройдет мимо сидящей на воде чайки?

2.3. Теплоход идет из Ярославля в Астрахань без остановок пять суток, а обратно — на сутки больше. Сколько суток из Ярославля в Астрахань будет плыть плот?

2.4. Из туристического речного трамвайчика, движущегося против течения, выпал чемодан туриста. Через промежуток времени t_0 после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошел промежуток времени $4t_0$?

2.5. Для измерения длины медленно движущегося товарного поезда восьмиклассник проехал на велосипеде из хвоста поезда в начало и обратно. При этом измерил пройденный им путь и расстояние, на которое за это время переместился поезд. Спидометр велосипеда показал, что мальчик проехал 1800 м. За это время поезд проехал 1200 м. Найдите длину поезда.

2.6. По спускающемуся эскалатору идет пассажир со скоростью $V = 1$ м/с относительно эскалатора. Скорость эскалатора $U = 1$ м/с. Общее количество видимых ступеней $N = 100$. Сколько ступеней пройдет пассажир, спускаясь по эскалатору? Получите ответ для произвольного направления и величины скорости человека. Объясните результат при близких по модулю и противоположных по направлению скоростях.

2.7. Сухогруз вышел из порта A и двинулся строго на запад со скоростью 10 узлов (1 узел = 1 морская миля в час). Через 10 часов он сменил направление на северное и прибыл в порт Б еще через 10 часов. На следующий день он вышел из порта Б с той же скоростью V в юго-восточном направлении, одновременно с ним из порта A на юго-запад вышел катер со скоростью $U = 20$ узлов. Найти минимальное расстояние между сухогрузом и катером.

2.8. На соревнованиях мотодельтапланеристов все участники стартуют из одной точки, но двигаться должны в разных направлениях. Всем необходимо пролететь расстояние L и вернуться в исходную точку. Участник имеет право сам выбрать направление полета. Ветер дует с запада на восток. Имеет ли смысл участнику задуматься о том, какое направление полета выбрать, или правы организаторы соревнований, считая, что все находятся в равных условиях — те, кому ветер дует навстречу и мешает, будут в выигрышном положении при возвращении, когда ветер будет «дуть в спину» и помогать?

2.9. Мотоциклист и велосипедист равномерно передвигаются по двум находящимся на плоскости пересекающимся прямолинейным трассам: каждый по своей. В 12:00 мотоциклист, велосипедист и точка пересечения трасс находились в различных вершинах правильного треугольника. В 13:00 мотоциклист, движущийся со скоростью 70 км/ч, пересёк вторую трассу. Велосипедист пересёк первую трассу в 14:00. Найдите все моменты времени от 07:00 до 18:00, когда расстояние между спортсменами равно 245 км.

2.10. Два велосипедиста передвигаются с постоянными скоростями, каждый по своей прямолинейной дорожке. В $13:00$ расстояние между ними было 4 км, в $13:08$ – 4 км, в $13:17$ – $4,5$ км. А) Определить момент времени, в который они будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. Б) Определить величину относительной скорости одного велосипедиста относительно другого.

2.11. По реке с постоянными скоростями плывут два катера, каждый строго по своей прямой линии. В некоторый момент времени первый из них оказался в точке A, а второй — в точке B. Причем направление течения реки в этот момент времени составило угол $60°$ к направлению $\overrightarrow{AB}$. Через некоторое время катера встретились в точке C. Оказалось, что треугольник ABC прямоугольный равнобедренный с вершиной в точке A. Найдите минимальное отношение собственной скорости второго катера к скорости реки, при котором это осуществимо.

2.12. Два автомобиля движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по дорогам, пересекающимся под прямым углом. Когда первый автомобиль достиг перекрестка, второму оставалось доехать до перекрестка расстояние L. Спустя какое время после этого расстояние между машинами будет наименьшим? Чему равно это наименьшее расстояние?

2.13. На лодке переплывают реку, текущую в плоскости (x, y), отправляясь из точки с координатами $(0, 0)$. Скорость лодки в стоячей воде $V = 5$ м/с, вектор скорости течения реки имеет координаты $(3$ м/с$, 0)$, ширина реки $L = 200$ м. (а) Найдите координаты точки, в которой лодка пристанет к противоположному берегу, если скорость лодки относительно воды имеет координаты $(0, V)$. (б) Какой курс следует держать, чтобы попасть в точку B с координатами $(0, L)$? в точку $(L; L)$. (Укажите координаты вектора скорости лодки относительно воды.)

2.14. Старый рыбак на небольшой лодке с мачтой кружил по озеру по гладкой замкнутой траектории с постоянной по модулю скоростью v. Клева практически не было, и рыбак сосредоточил свое внимание на поведении флажка на мачте. За время полного оборота флажок несколько раз показывал на север, несколько раз на восток, а все остальное время — между этими направлениями. Найдите величину и направление скорости ветра.

3 Одномерное равноускоренное движение

3.1 Краткие теоретические сведения

При описании движения точки по прямой удобно выбрать числовую ось (OX) вдоль этой прямой. Для определения характера движения достаточно знать функциональную зависимость координаты x от времени t. Зависимость координаты от времени $x(t)$ называется законом движения.

Если за промежуток времени $\triangle t$ материальная точка совершит перемещение $\triangle x$, то средняя скорость материальной точки на этом промежутке времени будет определяться отношением $\frac{\triangle x}{\triangle t}$. Здесь идет речь о промежутке времени $[t,\, t+\triangle t]$ и о перемещении материальной точки между точками с координатами x и $x+\triangle x$. Если устремить промежуток времени $\triangle t$ к нулю, то отношение $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ в пределе определяет мгновенную скорость V_x в проекции на ось OX материальной точки в момент времени t. Это значит, что мгновенная скорость материальной точки есть производная по времени от координаты этой точки $V_x(t) = \dot{x}$.

Аналогично определяется проекция мгновенного ускорения материальной точки a_x на ось OX. Среднее ускорение есть отношение изменения скорости $\triangle V_x$ к промежутку времени $\triangle t$, за которое это изменение произошло. Если устремить промежуток времени $\triangle t$ к нулю, то отношение $\frac{\triangle V_x}{\triangle t}$ в пределе определяет проекцию мгновенного ускорения a_x материальной точки в момент времени t.

В результате получаем связь между координатой, скоростью и ускорением в общем виде:

$$V_x = \dot{x},\ a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}.$$

В практике решения задач важны два частных случая движения по прямой, в которых закон движения выглядит достаточно просто:

Равномерное прямолинейное движение ($V_x = \text{const}$),

$$x(t) = x_0 + V_x \cdot (t - t_0).$$

Равноускоренное прямолинейное движение ($a_x = \text{const}$),

$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot (t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2}, \; V_x(t) = V_{0x} + a_x(t - t_0).$$

Здесь x_0 — начальная координата, t_0 — начальный момент времени, V_{0x} — проекция начальной скорости на ось OX.

Для решения задач необходимо определить характерные моменты времени и записать закон движения в эти моменты времени.

Литература: [1] С. 46 —56; [3] С. 40 — 49; [4] С. 77 —105.

3.2 Задачи

3.1. Тележка движется вдоль линейки с постоянным ускорением. В момент, когда секундомер показывает $t_1 = 7$ с, тележка находится против отметки $x_1 = 70$ см, в момент $t_2 = 9$ с — против отметки $x_2 = 80$ см и в момент $t_3 = 15$ с — против отметки $x_2 = 230$ см. С каким ускорением движется тележка?

3.2. После толчка шарик вкатывается на наклонную плоскость. На расстоянии $l = 30$ см от начала движения шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после толчка. Считая ускорение постоянным, найдите начальную скорость v_0 и ускорение a.

3.3. Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у начала первого вагона, он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время $\tau_1 = 5$. Считая движение поезда равноускоренным, найдите, за какое время τ_2 мимо пассажира пройдет второй вагон.

3.4. Пассажир, стоящий на перроне, заметил, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него в течение $t_1 = 4$ с, а второй — в течение $t_2 = 5$ с. Определите ускорение поезда a , если передний конец поезда остановился на расстоянии $L = 75$ м от пассажира. Движение поезда считайте равнозамедленным.

3.5. В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1 = 9$ с, а $t_2 = 8$ с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найдите, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

3.6. Лыжник съехал с горы длиной $l_1 = 60$ м за $t_1 = 15$ с, а затем проехал еще $l_2 = 30$ м до остановки. Найдите скорость v_1 лыжника в конце спуска и ускорение a_2 на горизонтальном участке. Ускорение на каждом участке считайте постоянным. Постройте график зависимости скорости от времени.

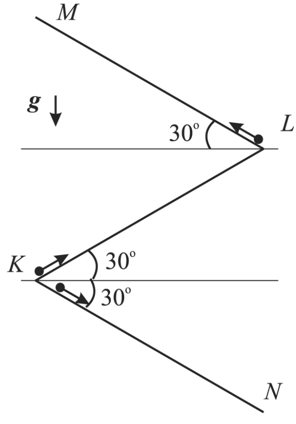
3.7. Свободно падающее тело прошло последние $h = 30$ м за время $\tau = 0,5$ с. С какой высоты H падало тело?

3.8. Тело падает без начальной скорости с высоты $H = 100$ м. За какое время тело проходит первый и последний метр своего пути? Какой путь проходит тело за первую и последнюю секунду падения?

3.9. За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит путь $s_3 = 5$ см и останавливается. Какой путь тело проходит за вторую секунду этого движения?

3.10. С вышки без начальной скорости был сброшен предмет. Время от момента сброса до приема звука падения на поверхность Земли составило t. Найдите высоту вышки в предположении, что сопротивлением воздуха можно пренебречь, скорость звука равна V, ускорение свободного падения — g.

3.11. По двум гладким наклонным полубесконечным плоскостям KL и LM с одинаковым углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту запустили вверх материальные точки с одинаковой начальной скоростью. Третья точка движется равномерно по третьей плоскости KN под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $V = 30$ см/с в направлении точки N. С каким интервалом времени начали движение первые две точки, если все три указанные точки дважды оказалась на одной вертикали? Принять g равным 10м/с^2, ответ дать в миллисекундах. Плоскость $KLMN$ вертикальна.



3.12. Крышка вертикального колодца глубиной 10 м периодически мгновенно открывается и закрывается так, что колодец находится в открытом состоянии одну секунду и в закрытом состоянии тоже одну секунду. Камень подброшен со дна колодца вертикально вверх с начальной скоростью V ровно за 0,5 секунды до очередного открытия крышки. При каких значениях начальной скорости V камень свободно вылетит из колодца и упадет обратно на крышку колодца? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

4 Двумерное равноускоренное движение

4.1 Краткие теоретические сведения

Выберем на плоскости Декартову систему координат (OXY). Тогда положение материальной точки, как точки $P(x, y)$ на плоскости в произвольный момент времени t может быть определено из знания временной зависимости координат $(x(t),\ y(t))$. Соединим вектором $\vec{r}$ начало координат и точку P. Вектор $\vec{r}$ называется радиус-вектором материальной точки. Закон движения в этом случае — это зависимость векторной функции $\vec{r}(x(t); y(t))$ от времени. В общем виде скорость и ускорение определяются из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{\vec{r}}, \\ \vec{a} = \dot{\vec{V}}. \end{cases}$$

В частном случае равноускоренного движения ($\vec{a}(a_x; a_y) = \mathrm{const}$) закон движения имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}(t - t_0) + \dfrac{a_x(t - t_0)^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + V_{0y}(t - t_0) + \dfrac{a_y(t - t_0)^2}{2}. \\ V_x(t) = V_{0x} + a_x(t - t_0), \\ V_y(t) = V_{0y} + a_y(t - t_0). \end{cases}$$

Здесь $(x_0; y_0)$ — координаты начальной точки, $(V_{0x}; V_{0y})$ — координаты вектора начальной скорости.

При движении точки под действием силы тяжести часто удобно выбрать ось Ox горизонтальной, а ось Oy —направленной вертикально вверх. В этом случае закон движения примет вид:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_0 \cos\alpha(t - t_0), \\ y(t) = y_0 + V_0 \sin\alpha(t - t_0) - \dfrac{g(t - t_0)^2}{2}. \\ V_x(t) = V_0 \cos\alpha, \\ V_y(t) = V_0 \sin\alpha - g(t - t_0). \end{cases}$$

Здесь α угол между вектором начальной скорости и горизонтом. Исключая из этой системы уравнений $t - t_0$, получим уравнение траектории $y(x)$:

$$y - y_0 = (x - x_0)\mathrm{tg}\alpha - \frac{g(x - x_0)^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Литература: [1] С. 61 —75; [3] С. 49 — 53; [4] С. 105 —112.

4.2 Задачи

4.1. Снаряд вылетает из пушки с начальной скоростью $v_0 = 1000$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определите: время полета снаряда τ; максимальную высоту подъема снаряда H; дальность полета снаряда L.

4.2. Студент гулял с собакой. Размахнувшись изо всех сил, он бросил мячик под углом к горизонту. Собака побежала за мячом со скоростью в два раза меньшей, чем начальная скорость бросания мяча. При каком угле бросания собака поймает мячик?

4.3. Два снаряда выпущены из одной точки на поверхности Земли и оба попали в другую точку на той же горизонтали. Определите угол между начальной скоростью второго снаряда к горизонту, если начальная скорость первого направлена под углом α.

4.4. Дальность полета двух снарядов, выпущенных из одного орудия, одинакова, а время полета отличается в $n = \sqrt{3}$

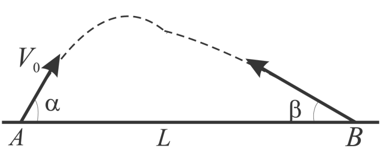
раза. Определите углы к горизонту, под которыми вылетают снаряды.

4.5. Человек бросает камень через забор высотой $H = 2,5$ м. На каком расстоянии от забора он может находиться, если бросок производится с высоты $h = 2$ м от поверхности Земли со скоростью $V_0 = 5$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

4.6. В протекторе колеса радиуса R автомобиля, движущегося со скоростью V, застрял камень. На какую максимальную высоту может подняться камень, внезапно вылетев из протектора?

4.7. На тележке, которая движется горизонтально со скоростью V стоит школьник Гаврила. В тот момент, когда он оказался около своей одноклассницы Глафиры, мальчик подбросил вверх маленький шарик со скоростью U (со своей точки зрения), а спустя промежуток времени τ еще один с той же скоростью. Какое минимальное расстояние между шариками зафиксировала Глафира, пока оба шарика были в воздухе? Каково с ее точки зрения перемещение первого шарика к этому моменту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.8. Яблоко брошено из точки A под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью $V_0 = 20$ м/с. Из точки B, расположенной на расстоянии $L = 30$ м от точки A на той же горизонтали, в тот же момент времени под углом $\beta = 30°$ к горизонту (см. рисунок) производится выстрел из арбалета так, что стрела попадает в яблоко. Через сколько секунд после выстрела это произойдёт?



4.9. Пушка делает два выстрела с интервалом $\tau = 10$ с. (а) Каким будет расстояние l между снарядами спустя время $t = \tau$ после второго выстрела? Скорость снаряда при выстреле $V_0 = 300$ м/с, ствол пушки направлен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Ускорение свободного падения принять $g = 9,8$ м/с^2, силу сопротивления воздуха при движении снарядов не учитывать. (б) Определите минимальное расстояние между снарядами во время полета.

4.10. Граната разрывается на множество маленьких осколков, которые начинают лететь во все стороны с одинаковой по модулю скоростью. Определете геометрическое место точек, в которые попадет хотя бы один осколок.

4.11. С отвесного берега высотой h произведен выстрел в горизонтальном направлении. Начальная скорость пули равна v_0. Найдите модуль и направление скорости пули v в момент вхождения в воду.

4.12. Под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через какое время его скорость будет направлена под углом $\beta = 45^\circ$ к горизонту?

4.13. Камень бросают горизонтально с вершины горы, склон которой образует угол α с горизонтом. С какой скоростью v_0 нужно бросить камень, чтобы он упал на расстоянии L от вершины?

4.14. Материальная точка движется по плоскости по закону $x(t) = 36 + 3t - 5t^2$, $y(t) = -4t$. Найти модуль изменения скорости точки за третью секунду от начала движения.

4.15. Тело, находящееся на расстоянии S от источника звука, начало движение в момент пуска звукового сигнала без начальной скорости с постоянным ускорением a по прямой, образующей с направлением на источник звука угол $\alpha = 60^\circ$. Какое расстояние l пройдет это тело до встречи с сигналом, если скорость распространения сигнала равна V?

5 Законы Ньютона. Кинематические связи

5.1 Краткие теоретические сведения

Центральное понятие механики — это взаимодействие тел друг с другом. Меру взаимодействия тел, в результате которого характер движения тел меняется, называют силой.

Сила — векторная величина. Сила характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. Если силы приложены в одной точке, то их действие можно заменить на действие их векторной суммы, которая называется равнодействующей.

Рассмотрим идеальную пружину, для которой предполагается, что растяжение пружины пропорционально приложенной силе. Таким образом, с помощью пружины можно, не зная численного значения силы, изменить силу, скажем, в два раза. В экспериментах с движением тележки в лабораторных условиях под действием сил, созданных растянутой пружиной, легко обнаружить, что при изменении силы в два раза ускорение движения тележки тоже меняется в два раза, то есть ускорение пропорционально действующей силе

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где m — коэффициент пропорциональности, называемый массой тела. В этом состоит суть второго закона Ньютона. Чем больше масса, тем меньшее ускорение, вызываемое одной и той же силой.

Из второго закона Ньютона следует, что если равнодействующая всех действующих на материальную точку сил равна нулю, то тело будет двигаться равномерно и прямолинейно или находиться в покое. Это свойство тел (не менять характер движения без изменения силового воздействия) называется инерцией. Масса тела m — это мера инертности тела. Практика показывает, что не во всех системах отсчета выполняется второй закон Ньютона.

Для прояснения ситуации с системами отсчета формулируется другой закон (первый закон Ньютона), который утверждает, что существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых выполняется второй закон Ньютона. При этом все инерциальные системы движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Следует заметить, что для удачного решения задач необходимо правильно определить действующие на тело силы. Для этого необходимо правильно определять природу силы и иметь в виду, что реальные силы всегда вызваны каким-то другим телом.

При этом для взаимодействующих тел выполняется третий закон Ньютона, который кратко может быть сформулирован так: сила действия равна силе противодействия. Силы взаимодействия двух тел равны по величине, направлены в противоположные стороны, лежат на одной прямой и имеют одну природу.

Для получения полной системы уравнений, описывающей поведение системы материальных точек, необходимо для каждой из них написать уравнение второго закона Ньютона, определив все силы, действующие на каждую точку, а также уравнения связей — соотношения между координатами и скоростями точек, возникающие из-за геометрических ограничений, наложенных на систему (наличие нерастяжимых нитей, твердых плоскостей и т.п.).

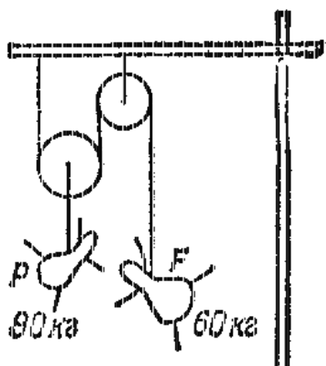
Литература: [1] С. 83 —107; [3] С. 57 — 76; [4] С. 157 —193; [6] С. 157 — 173.

5.2 Задачи

5.1. На концах нерастяжимой нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, висят на высоте $H = 2$ м два груза масса которых $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. В начальный момент грузы покоятся. Определите силу натяжения нити и время, за которое груз m_2 достигнет пола. Массой блока и нити пренебречь.

5.2. На нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массы m_1 и m_2. Блок в заторможенном состоянии уравновешен и подвешен к динамометру. На сколько изменятся показания динамометра, если блок освободить?

5.3. (Задача Фейнмана). Двое молодых марсиан Паоло и Франческа, хотят переправиться через марсианский канал Римини, но ни одна гондола не берет их обоих сразу, а переправляться по отдельности они отказались. Находчивый гондольер Джузеппе умудряется все-таки заработать на их переезде. Он подвешивает эту парочку на мачте (см. рисунок) с помощью абсолютно гладких блоков и веревок (характерная особенность всех марсианских конструкций) и быстро переправляет влюбленных через канал, пока ни один из них не успевает коснуться ни мачты, ни палубы. Много ли при этом Джузеппе выигрывает в нагрузке на мачту? Напоминаем: натяжение невесомой нити, перекинутой без трения через невесомый блок, одинаково с обеих сторон блока.



5.4. Маляр работает в подвесном кресле. Его масса $M =$

72 кг. Ему срочно понадобилось подняться вверх. Он начинает тянуть за веревку, перекинутую через блок, причем с такой силой, что сила его давления на кресло уменьшается до $P_1 = 400$ Н. Само кресло весит $m = 12$ кг. (а) Чему равно ускорение маляра и кресла? (б) Чему равна полная нагрузка на блок?

5.5. К оси подвижного блока прикреплен груз массой m. С какой силой F надо тянуть конец нити, перекинутой через второй блок, чтобы груз поднимался с ускорением a? Чтобы груз покоился? Массой блоков и нити пренебречь.

5.6. Через неподвижный блок, масса которого пренебрежимо мала, перекинута веревка. На одном конце веревки висит груз с массой $M = 25$ кг, а за другой конец ухватилась обезьяна и карабкается вверх. С каким ускорением a поднимается обезьяна, если груз находится все время на одной высоте? Масса обезьяны $m = 20$ кг. Через какое время τ обезьяна достигнет блока, если первоначально она находилась от него на расстоянии $l = 20$ м.

5.7. Через невесомый блок перекинута веревка с грузами m и $2m$. Блок движется вверх с ускорением b. Пренебрегая трением, найдите давление блока на ось.

5.8. В столовой на втором этаже ГЗ МГУ сделано специальное устройство для маленьких тарелок. Имеется вертикальный цилиндр, снизу закрытый поршнем, которой удерживается пружиной. прикрепленной к корпусу. Тарелки массой m толщины d ставятся на поршень. Пружину какой жесткости следует подобрать, чтобы верх верхней тарелки всегда был на одном и том же уровне независимо от числа тарелок? Сила упругости пружины пропорциональна ее растяжению, коэффициент пропорциональности называется жесткостью пружины.

5.9. Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй — четверть этой высоты. Найдите отношение масс шариков. Силу сопротивления воздуха считайте постоянной.

5.10. Спускаемые аппараты А и Б движутся вертикально вниз с одинаковыми постоянными скоростями под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат Б имеет вдвое больший диаметр и в 12 раз большую силу тяги тормозного двигателя, чем аппарат А. Найти отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата А, считая аппараты однородными шарами одинаковой плотности, изменение массы которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления пропорциональна площади поверхности аппарата.

5.11. Шарик массой $m = 10$ г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}v^2$, где v — значение модуля скорости точки в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время точка пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.

5.12. Два девятиклассника на переменке вышли на улицу и стали играть в мяч. Игра заключалась в перекидывании мяча друг другу. По мере игры ребята обнаружили, что если один мальчик кидает мяч под углом α к горизонту против ветра, то к другому мальчику мяч подлетает под углом α к вертикали. Определить отношение силы ветра F, действующей на мяч, к его весу P. Считать, что сила сопротивления движению мяча постоянна и направлена горизонтально.

6 Силы сопротивления движению

6.1 Краткие теоретические сведения

В механике все законы природы постигаются в первую очередь на примере взаимодействий тел силами гравитации, упругости и трения. Законы гравитации и упругости имеют четкую однозначную математическую формулировку. А сила трения или, в общем случае, сила сопротивления движению, проявляет себя неоднозначно.

При падении пылинки в воздухе сила сопротивления пропорциональна скорости, а при движении пули в воздухе сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. При скольжении одного тела по другому сила (сухого) трения пропорциональна силе нормального давления между этими телами.

В изучении трения важным обстоятельством является переход от трения покоя к трению скольжения. Всем нам приходилось двигать шкафы. Для того, чтобы шкаф начал скользить по полу, необходимо приложить определенную силу. Если сила меньше этой определенной, то шкаф останется стоять на месте. Если шкаф остался стоять, значит сила трения покоя равна приложенной к шкафу силе.Когда сила трения покоя достигает определенной предельной величины, начинается скольжение.

Для описания силы сухого трения будем использовать модель Кулона-Амонтона: сила трения покоя наблюдается при контакте двух неподвижных твердых тел, лежит в общей касательной плоскости, имеет величину и направление такие, чтобы удерживать тела неподвижными друг относительно друга, но не превосходит некоторого максимального значения $F_{\max}$. При относительном скольжении сила трения не зависит от скорости скольжения и пропорциональна силе нормального давления N: $F_{\text{ск}} = \mu N$. Коэффициент трения μ зависит только от материалов соприкасающихся тел. Также предполагается, что $F_{\max} = F_{\text{ск}}$.

Эта модель имеет геометрическую интерпретацию. Рассмотрим силу $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F_{\text{тр}}}$. Угол α между $\vec{R}$ и нормалью к поверхности задается соотношением $\text{tg}\alpha = F_{\text{тр}}/N$. Так как $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, $\alpha \leq \text{arctg}\mu$, то есть $\vec{R}$ лежит в конусе с вершиной в точке контакта, осью, направленной по нормали и углом полураствора $\text{arctg}\mu$. При этом в покое $\vec{R}$ лежит внутри конуса или на границе, а при скольжении — на границе конуса. Этот конус называется конусом трения, а угол его полураствора — углом трения.

Литература: [1] С. 107 —116; [3] С. 62 — 63; [4] С. 243 — 255.

6.2 Задачи

6.1. К телу массы m, которое покоилось на горизонтальной плоскости, приложили силу F. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ. Определите появившееся ускорение тела в зависимости от модуля и направления силы.

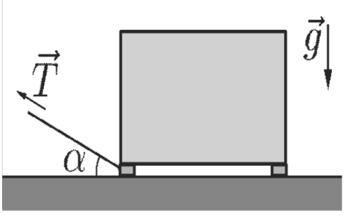
6.2. Если брусок поставить на наклонную плоскость с углом α к горизонту, он будет соскальзывать с ускорением a. Его можно удержать неподвижным, прикладывая силу F_1, направленную вдоль плоскости. Определите, какую минимальную силу, направленную вдоль плоскости, нужно приложить, чтобы тащить брусок вверх по плоскости.

6.3. На наклонную плоскость, образующую угол 30° с горизонтом, ставят два бруска, причем коэффициент трения у первого на 90% меньше, чем у второго. Брусок с меньшим коэффициентом трения начинает соскальзывать с ускорением 4 м/с^2. На сколько процентов отличается от него ускорение второго бруска? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

6.4. Брусок удерживается на наклонной плоскости с углом наклона α силой сухого трения (коэффициент трения μ). Какую минимальную силу, направленную горизонтально от плоскости, нужно приложить, чтобы брусок мог двигаться?

6.5. Брусок массы m равномерно соскальзывает с плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Какую силу в горизонтальном направлении нужно приложить, чтобы тащить бросок вверх вдоль плоскости?

6.6. Тяжелый шкаф массой M, каркас которого выполнен из однородного дерева, имеет форму куба с ребром a. Для его передвижения по горизонтальному полу к двум передним ножкам привязали веревку. Под каким углом α к горизонту следует направить веревку, чтобы усилие, необходимое для перемещения шкафа, было наименьшим? Коэффициент трения равен μ, ножки маленькие и расположены по краям.

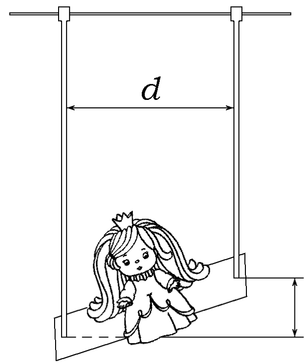


6.7. Два бруска, связанные невесомой нерастяжимой нитью, соскальзывают с наклонной плоскости с углом при основании α. Массы брусков m_1 и m_2, коэффициенты трения между брусками и плоскостью соответственно μ_1 и μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$). Найдите силу натяжения нити, если брусок 1 находится выше.

6.8. С наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту равен α, соскальзывает без трения клин. Верхняя грань клина горизонтальна. На клине покоится брусок массы m. Найдите силу трения, действующую на брусок.

6.9. Угол наклона к горизонту ленты подъемника равен $\alpha = 5°$. При каком максимальном ускорении ленты поднимаемый ящик не будет скользить по ленте подъемника, если коэффициент трения между лентой и ящиком $\mu = 0,2$. Считать $g = 10$ м/с^2.

6.10. Младшая сестра попросила студента мехмата Гаврилу починить качели во дворе. После ремонта они стали представлять собой плоскую доску (сиденье), жестко приделанную к двум параллельным стержням, расстояние между которыми равно d. Стержни закреплены на горизонтальной оси в цилиндрическом шарнире, то есть могут вращаться относительно этой оси. Один из стержней оказался короче другого на a. При этом нормаль к сиденью лежит в одной плоскости со стержнями. Сестра посадила на качели свою любимую куклу, которая держаться за стержни не может, а удерживается на сиденье только силой сухого трения с коэффициентом μ. На какой угол можно отклонить качели от вертикали, чтобы кукла не соскользнула с сиденья?



6.11. Во время влажной уборки класса Чукин и Геков стали экспериментировать со шваброй. Чукин положил один конец древка швабры на ребро своей ладони, а Геков — другой конец древка на ребро своей ладони. После этого ребята стали сдвигать ладони навстречу друг другу. По мере движения ладоней швабра все время находилась в равновесии, вплоть до момента времени, когда ладони мальчиков сошлись в одной точке. Повторяя этот эксперимент несколько раз, ребята получали тот же самый результат — их ладони встречались в одной и той же точке на швабре. Помогите мальчикам объяснить этот результат испытания. В каком отношении эта точка встречи ладоней делит древко швабры, если вес поперечного бруска в два раза меньше древка?

6.12. Вдоль вертикального шеста, опирающегося на шероховатую горизонтальную поверхность, приложена сила F. Шест начали постепенно наклонять, сохраняя неизменной величину силы, приложенной к торцу. Найдите угол наклона шеста к горизонтали, при котором шест начнет скользить по поверхности. Вес шеста P в $n = 2$ раз меньше, чем сила F, коэффициент трения торца шеста и поверхности $k = 1/3$.

7 Импульс системы материальных точек

7.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим две взаимодействующие с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ точки массами m_1, m_2. Пусть в момент времени t они двигались со скоростями $\vec{v}_1^0$ и $\vec{v}_2^0$ соответственно. Через промежуток времени $\triangle t$ в результате взаимодействия точки приобретут скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Можно сказать, что в течение промежутка времени $\triangle t$ точки двигались со средними ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соответственно. Тогда второй закон Ньютона для этих точек можно записать в виде:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_1^0}{\triangle t} = \frac{\vec{p}_1-\vec{p}_1^0}{\triangle t} = \frac{\triangle\vec{p}_1}{\triangle t}, \\ \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 = m_1\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_2^0}{\triangle t} = \frac{\vec{p}_2-\vec{p}_2^0}{\triangle t} = \frac{\triangle\vec{p}_2}{\triangle t}. \end{cases}$$

Вектор $\vec{p} = m\vec{v}$ называется импульсом материальной точки.

Если сложить эти два уравнения и учесть третий закон Ньютона $\vec{F}_1+\vec{F}_2 = 0$, то получится закон сохранения импульса для замкнутой системы точек

$$\vec{P} - \vec{P}^0 = 0,$$

где $\vec{P}^0 = \vec{p}_1^0 + \vec{p}_2^0$ — импульс системы тел в момент времени t, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ — импульс системы тел в момент времени $t + \triangle t$. Если система не замкнута и равнодействующая внешних по отношению к данной системе тел сил не равна нулю $\vec{N} \neq 0$, то изменение импульса системы будет равно импульсу внешних сил:

$$\vec{P} - \vec{P}^0 = \vec{N}\triangle t.$$

Назовем центром масс системы материальных точек массами m_i, имеющих радиус-векторы $\vec{r_i}$, следующую точку:

$$\vec{r_c} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}\right) / \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right).$$

Дифференцируя это соотношение, получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r_c}} = \vec{P}$. Таким образом, если импульс системы точек сохраняется, то ее центр масс движется равномерно, а если импульс системы точек равен нулю, то центр масс покоится.

Литература: [1] С. 165 —174; [3] С. 76 — 85; [4] С. 286 — 292; [6] С. 174 — 185.

7.2 Задачи

7.1. Лодка стоит неподвижно в стоячей воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние h сдвинется лодка, если масса человека $m = 60$ кг, масса лодки $M = 120$ кг, длина лодки $L = 3$ м? Сопротивлением воды пренебречь.

7.2. Две одинаковые лодки идут параллельными курсами с равными по модулю скоростями. Когда лодки встречаются, с одной лодки на другую перебрасывают груз, а затем со второй лодки на первую перебрасывают такой же груз. В другой раз грузы перебрасывают одновременно. В каком случае скорость лодок после перебрасывания будет больше?

7.3. Лягушка массы m сидит на конце доски массой M и длины L. Доска плавает по поверхности пруда. Лягушка прыгает под углом α к горизонту вдоль доски. Какой должна быть начальная скорость лягушки, чтобы после прыжка она оказалась на противоположном конце доски?

7.4. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какие траектории будут описывать жук и обруч относительно стола, если жук начнет ползти по обручу. Масса обруча M, его радиус R, масса жука m.

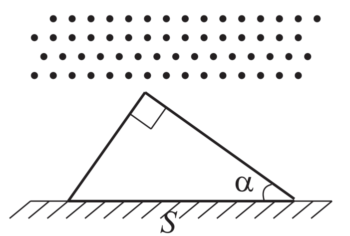
7.5. Космонавт массой m и космический корабль массой M связаны веревкой, длина которой равна l. Первоначально космонавт и корабль неподвижны, а веревка натянута. Космонавт выбирает веревку, подтягиваясь к кораблю. Какое расстояние пройдут космонавт и корабль до встречи? Внешних сил нет.

7.6. Однажды Винни-Пух забрался на Высокий-Превысокий дуб, чтобы добыть мед, но около дупла сорвался вниз, упал, не задевая за ветки, и больно ударился о землю. Он поднялся еще раз и вновь сорвался, ударился о ветку, пролетев $1/n$-ую ($n = 4$) часть пути. При этом его скорость уменьшилась в $k = 4$ раза, не изменив направления. Дальше медвежонок летел до земли, ничего больше не задевая. Сравните суммарный ущерб, полученный Пухом в описанных случаях. Считайте, что ущерб пропорционален силе, действующей на него. Длительность всех ударов одинакова, удары о землю абсолютно неупругие. Сопротивлением воздуха пренебречь.

7.7. Российские химики из г. Химки изобрели новое вещество, которое может находиться в двух состояниях: в «разрыхленном» плотности 2000 кг/м^3, и в «плотном» плотности 4000 кг/м^3. При этом вещество из «разрыхленного» состояния переходит в «плотное» при сжатии любой сколь угодно малой силой. Для перевода вещества в «плотное» состояние используют следующую технологию: в длинный 100-метровый шланг, заполненный веществом в «разрыхленном» состоянии вводят поршень, который движется со скоростью 1 м/с. На какую глубину успеет проникнуть поршень в шланг за время необходимое для перевода всего вещества в шланге в «плотное» состояние? С какой силой нужно давить на поршень сечения 10^{-3} м^2, чтобы он двигался со скоростью 1 м/с?

7.8. Два лягушонка сидят рядом посреди пруда на большом листе кувшинки, оторвавшемся от растения. В каком случае лист кувшинки приобретает большую скорость — когда лягушата прыгнут одновременно или когда они будут прыгать последовательно? Считать, что лягушата прыгают в одном направлении и, оттолкнувшись, приобретают одинаковую скорость относительно листа. Сопротивлением воды пренебречь.

7.9. На покоящуюся трехгранную призму, один двугранный угол которой прямой, а другой —$\alpha < 45°$, падает однородный поток дождевых капель (см. рис.). В какую сторону начнет двигаться призма, если считать удары капель абсолютно упругими и трением призмы о поверхность пренебречь? Определите скорость, которую будет иметь призма спустя большой промежуток времени. Концентрация капель равна n, площадь наибольшей боковой грани S, скорость падения капель V.



7.10. Ракета, первоначальная масса которой M_0, выбрасывает продукты сгорания топлива с постоянной скоростью v_0 (по отношению к ракете). В единицу времени выбрасывается масса газов, равная r_0. Рассчитайте ускорение ракеты в начальный момент, пренебрегая силой тяжести.

7.11. Цепочку длины L подняли за один конец так, что она стала вертикальной, а второй ее конец касается стола. При $t = 0$ верхний конец отпускают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от времени.

8 Механическая работа. Мощность

8.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим материальную точку массой m под действием постоянной силы $\vec{F} = \mathrm{const}$. Пусть за время Δt точка совершит перемещение $\vec{U}$. Тогда работа A силы $\vec{F}$ равна $A = \vec{F} \cdot \vec{U} = FU \cos\alpha$, где F и U — величины векторов силы и перемещения, α — угол между направлением силы и перемещения.

Мощность W определяется как работа в единицу времени $W = \frac{A}{\Delta t}$. Мгновенная мощность — отношение работы, произведенной за малый промежуток времени, к величине этого промежутка: $dA = W dt$.

Если сила не постоянна, то для вычисления работы необходимо пройденный точкой путь разбить на большое количество маленьких частей $\triangle U_i$, столь маленьких, чтобы на коротком пути можно было считать силу постоянной $F_i = \mathrm{const}$. Тогда работа на каждом таком малом перемещении будет равна $A_i = F_i \triangle U_i \cos\alpha_i$. Полная работа в этом случае равна $A = \Sigma A_i$.

Так как $\Delta U_i = v_i \Delta t$, несложно получить соотношение $W = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Пример. Рассмотрим точку массой m, скользящую по наклонной плоскости с углом α к горизонту. На нее в общем случае действует три силы: сила тяжести mg, сила нормального давления $N = mg\cos\alpha$, и сила трения, равная $F_{\text{ск}} = \mu N = \mu mg \cos\alpha$. Для каждой силы можно вычислить работу при перемещении тела на расстояние l вдоль наклонной плоскости.

Работа силы тяжести равна $A_g = mgl\cos(\pi/2 - \alpha) = = mgl \sin\alpha = mgh$, где h — изменение высоты точки над Землей. Отметим, что работа силы тяжести не зависит от траектории.

Работа силы нормального давления равна нулю, так как перемещение точки перпендикулярно направлению силы.

Работа силы трения равна $A_{fr} = -\mu N l = -\mu m g l \cos\alpha$. Заметим, что работа сил сопротивления всегда неположительна.

Рассмотрим задачу о прямолинейном движении материальной точки массой m с начальной скоростью $\vec{v}_0$, на которую действует постоянная сила F в течение промежутка времени $\triangle t$.

В результате материальная точка приобретает скорость $\vec{v}$.

Из второго закона Ньютона можно вывести, что работа силы F будет равна $A_F = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Ясно, что комбинация $\frac{mv^2}{2}$ имеет совершенно определенный физический смысл: это работа, которую совершает сила, разгоняя точку до указанной скорости. Эту величину называют кинетической энергией материальной точки $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Из решения вышеприведенной задачи следует, что

$$E_k - E_k^0 = A,$$

изменение кинетической энергии точки равно работе сил, которые на нее действуют. Это утверждение — теорема об изменении кинетической энергии.

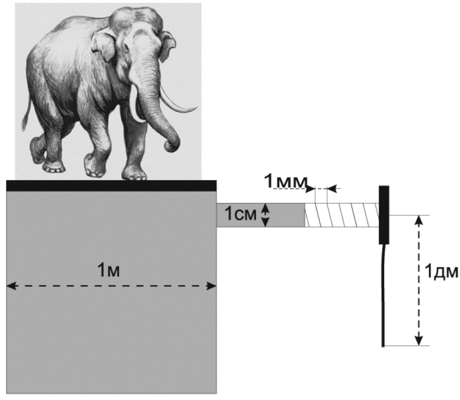
Литература: [1] С. 179 —185; [3] С. 85 — 88, 91 — 92; [4] С. 312 —324; [6] С. 71 — 73, 79 — 84, 243 — 247.

8.2 Задачи

8.1. Тело массой m поднимается вверх с ускорением a на высоту h. Определите работу поднимающей силы и работу силы тяжести.

8.2. Требуется выкопать цилиндрическую яму глубины h. Какова будет глубина ямы, когда будет совершена половина работы?

8.3. В цирке восьмиклассник Гаврила нашел гидравлический пресс: от бака с водой, плотно закрытого крышкой, диаметр которой 1 м, отходит трубка диаметром 1 см. В трубку вкручен изготовленный на секретном заводе с применением нанотехнологий абсолютно гладкий болт, шаг резьбы которого 1 мм. При минимальном давлении на крышку болт выкручивается и вылетает из трубки. Сможет ли Гаврила гаечным ключом длины 1 дм, прикрепленным к головке болта, удерживать на крышке слона массой 3 т? Сколько полных оборотов гаечного ключа ему придется сделать, чтобы поднять слона на 1 мкм?



8.4. В бассейн прямоугольной формы с размерами $a \times b$ налита вода слоем глубины h. Одну из стенок передвигают так, что площадь дна уменьшилась вдвое. Определите работу, которую при этом совершили.

8.5. Тело массой m, брошенное под углом к горизонту, упало на расстоянии S от места броска, поднявшись на максимальную высоту H. Найдите работу, совершенную при броске.

8.6. Человек массой M, стоящий на гладком льду, бросает камень массой m в горизонтальном направлении с высоты h. Камень подает на лед на расстоянии L от места бросания. Какую работу совершил человек при броске?

8.7. Пуля массой $m = 10$ г вылетает из дула винтовки со скоростью $v = 800$ м/с. Какова средняя сила давления пороховых газов, если длина ствола равна $l = 60$ см?

8.8. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, пробивает доску, потеряв $\alpha = 10\%$ своей скорости. Определите среднюю силу сопротивления доски движению пули. Какое наименьшее количество таких досок нужно поставить в ряд, чтобы пуля застряла?

8.9. По горизонтальной трубе с помощью насоса перекачивается жидкость. Во сколько раз нужно увеличить мощность насоса для того, чтобы количество перекачиваемой жидкости за единицу времени возросло в 2 раза? Сопротивлением трения в трубе пренебречь.

8.10. Первый автомобиль имеет мощность двигателя N_1 и развивает максимальную скорость v_1. Второй автомобиль с мощностью двигателя N_2 на той же дороге развивает максимальную скорость v_2. Какую максимальную скорость разовьют автомобили, если первый возьмет на буксир второй? Силу сопротивления движению считать пропорциональной скорости.

9 Сохранение механической энергии

9.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим взаимодействие материальной точки массы m с Землей. В системе этих двух тел накоплена некоторая энергия, которую можно оценить по величине минимальной работы, которую надо совершить, чтобы разрушить эту систему, увести точку на бесконечное расстояние. Назовем эту энергию потенциальной энергией системы двух тел E_p.

Пусть тело находится на расстоянии x от Земли ($x = 0$ — в центре Земли). Уведем материальную точку на бесконечность по прямой, соединяющей центры тел. Можно показать, что работа сил тяготения не зависит от пути и определяется только изменением расстояния до Земли. Поэтому можно получить общий результат, рассматривая частный случай изменения расстояния между телами при движении по прямой соединяющей центры этих тел.

Переместим тело на небольшое расстояние $\triangle x$, такое, что силу тяготения, действующую на точку, на этом небольшом перемещении можно считать постоянной и равной в соответствии с законом всемирного тяготения в проекции на ось OX:

$$F_x = -G\frac{M_{\text{Земли}}m}{x^2}.$$

В этом случае будет совершена работа $A_g = F_x \triangle x$.

Минус в формуле вызван выбором оси координат, направленной от Земли к телу. В новом положении расстояние между Землей и телом будет равно $x + \triangle x$. В этом положении потенциальная энергия системы будет равна E_{p2}. Ясно, что $E_{p1} = E_{p2} + A_g$. Отсюда следует, что $A_g = E_{p1} - E_{p2} = -\triangle E_p$. Подставляя сюда выражение для работы A_g, получим связь между проекцией силы тяготения и потенциальной энергией

$$F_x = -\frac{\triangle E_p}{\triangle x}.$$

При стремлении расстояния $\triangle x$ к нулю, получится

$$F_x = -(E_p)'_x,$$

где $(E_p)'_x$ — производная потенциальной энергии по координате x. Отсюда получим для потенциальной энергии сил тяготения с учетом выражения для проекции силы F_x следующее выражение

$$E_p = -G\frac{M_{\text{Земли}}m}{x}.$$

Заметим, что в системе двух гравитирующих тел потенциальная энергия всегда отрицательна. Этот вывод распространяется на систему любого количества тел. Например, в Солнечной системе потенциальная энергия отрицательна.

Аналогичным образом, для упругой силы пружины, проекция которой на направление по оси пружины определяется формулой $F_x = -kx$, (k — жесткость пружины), потенциальная энергии будет определяться выражением: $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Рассмотрим разные виды механической работы: A_g — работа сил тяготения, A_e — работа упругих сил, A_{fr} — работа сил трения и A_o — работа прочих сил. В тех случаях, когда можно ввести потенциальную энергию E_p, работа представляется в виде: $A = -\triangle E_p$.

Важно, что вывод о возможности ввести в рассмотрение потенциальную энергию E_p основан на независимости работы рассматриваемой силы от формы пути и определяется только начальной и конечной точками траектории. Потенциальная энергия определяется с точностью до константы, однако, если это возможно, ее выбирают так, чтобы $E_p = 0$ при $F = 0$. Силы, для которых можно ввести потенциальную энергию называются потенциальными. Заметим, что, например, сила трения непотенциальна.

В общем случае из теоремы о кинетической энергии:

$$\triangle E_k = A_g + A_e + A_{fr} + A_o,$$

следует

$$E_k + E_p = A_{fr} + A_o$$

— закон изменения полной механической энергии. Из этого закона следует, что в замкнутой системе, в которой не действуют силы сопротивления (трения), и другие непотенциальные силы не совершают работы, выполняется закон сохранения полной механической энергии — сумма кинетической и потенциальной энергии не меняется в процессе движения.

Литература: [1] С. 186 —200; [3] С. 88 — 91, 92 — 107; [4] С. 324 —347; [6] С. 229 — 239, 247 — 254.

9.2 Задачи

9.1. Из пушки стреляют в горизонтальном направлении. Если выстрелить из закрепленной пушки, то снаряд вылетает со скоростью $v_1 = 500$ м/с. Если же выстрелить из незакрепленной пушки, то снаряд вылетает со скоростью $v_2 = 499$ м/с. С какой скоростью во втором случае откатывается пушка?

9.2. На горизонтальной поверхности зафиксирован желоб, имеющий форму дуги окружности радиуса R. Радианная мера дуги $\pi/2 + \alpha$. Желоб установлен выпуклостью вниз так, что его левый конец имеет вертикальную касательную. На гладкую внутреннюю поверхность желоба около точки с вертикальной касательной помещают маленький шарик и отпускают его. На каком расстоянии от точки соприкосновения поверхности и желоба шарик упадет на горизонтальную поверхность. Сопротивлением воздуха пренебречь.

9.3. Два тела массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями v_1 и v_2. Какое количество теплоты выделится в результате их абсолютно неупругого столкновения?

9.4. Два шара одинаковой массы движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. Найдите скорости шаров после центрального абсолютно упругого удара.

9.5. Шары массами m_1 и m_2 движутся поступательно навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2. Найдите скорости шаров после центрального абсолютно упругого удара.

9.6. Частица налетает на покоящуюся мишень и отскакивает от нее назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определите отношение массы частицы к массе мишени. Столкновение абсолютно упругое.

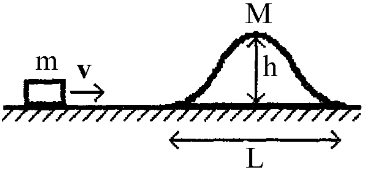
9.7. Движущийся поступательно шар налетает на другой покоящийся шар. Определите, какая часть кинетической энергии перейдет в тепло при абсолютно неупругом ударе, если отношение массы движущегося шара к массе покоящегося равно α.

9.8. Железнодорожный состав длиной L, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона α и останавливается, когда на горке находится ровно половина состава. Какова была начальная скорость состава? Трения нет.

9.9. Маленькое тело лежит на краю длинной тележки. Тележке ударом сообщают скорость v. На какое расстояние переместится тело по тележке, если масса тела m, масса тележки M, коэффициент трения между телом и тележкой μ, а трения между тележкой и полом нет?

9.10. Небольшое тело массой m едет по гладкой горизонтальной поверхности и въезжает на пологую гладкую незакрепленную горку массой M и высотой h (см. рис.). При какой скорости тело сможет переехать через горку?

9.11. На гладкой горизонтальной поверхности покоится гладкая пологая незакрепленная горка массой M, высотой h и длиной L (см. рис.). На горку въезжает со скоростью v тело массой m. Спустя время τ тело покидает горку. На какое расстояние успевает за это время сместиться горка?



9.12. На стенку массой M одновременно налетают очень много шариков. Самый большой имеет массу m и скорость v. Если шарики выстроить в ряд по убыванию массы, то массы соседей будут различаться в 2 раза, а скорость более легкого будет в 3 раза меньше скорости тяжелого соседа. Оцените количество выделившейся теплоты при абсолютно неупругом ударе всех шариков о стенку.

9.13. Две точки движутся по одной окружности без трения по инерции, сталкиваясь друг с другом и испытывая при столкновении абсолютно упругий удар. Найдите все возможные значения отношений масс этих точек, если их скорости относятся как 4 : 3 и известно, что сталкиваются они в одной и той же точке на окружности. При каких значениях отношения скоростей задача определения отношения масс имеет хотя бы одно решение?

10 Гидростатика. Закон Архимеда

10.1 Краткие теоретические сведения

Силовое взаимодействие в жидкости и газе характеризуется скалярной величиной — давлением p. Давление, производимое силой $\vec{F}$, равномерно распределенной по площади S, равно $p = \frac{F_n}{S}$, где F_n — проекция силы $\vec{F}$ на направление перпендикулярное площади S. Давление, создаваемое покоящейся жидкостью или газом в поле силы тяжести, называется гидростатическим. Для понимания действия давления важен утверждение о том, что в данной точке среды давление на всех площадках одинаково.

В покоящейся среде плотности ρ на глубине h давление на $p = \rho g h$ больше, чем на поверхности.

Закон Архимеда гласит, что на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной этим телом. Сила приложена к центру тяжести вытесненного объема и направлена перпендикулярно свободной поверхности.

Литература: [1] С. 332 —337; [3] С. 263 — 267; [4] С. 438 — 450.

10.2 Задачи

10.1. Зная радиус Земли $R = 6400$ км и атмосферное давление $P = 0,1$ МПа, найти массу земной атмосферы.

10.2. Гаврила экспериментировал с двумя жидкостями. Плотность первой жидкости была в два раза больше, чем второй. Мальчик взял одинаковые массы жидкостей в надежде получить новую жидкость со средней арифметической плотностью. Но измерения плотности показали иной результат.

Какой? В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы плотность смеси равнялась среднему арифметическому между плотностями данных жидкостей? Известно, что суммарный объем этих жидкостей после смешивания не меняется.

10.3. Экипаж трансгалактического глиссера упустил сферический контейнер, полностью заполненный жидкостью, в которую погружено небольшое твердое тело. Как будет располагаться тело в объеме жидкости? Считать, что какие-либо другие космические тела, способные оказывать на контейнер световое, гравитационное, электромагнитное и другие воздействия, отсутствуют.

10.4. Гаврила положил лед в стакан с водой, и уровень жидкости достиг края стакана. У мальчика возникли подозрения, что по мере таяния льда, содержимое стакана начнет переливаться через край. Насколько оправданы опасения мальчика. Обнаружил ли он лужицу на столе, когда лед растаял? Ответ обосновать.

10.5. В цилиндрический сосуд, частично заполненный водой, поместили деревянный брусок. Изменилось ли давление воды на дно сосуда?

10.6. Ледяной кубик плавает в стакане с водой. Поверх воды наливают рыбий жир, плотность которого на 17% меньше плотности воды. При этом половина объема кубика находится в воде, а половина — в жире. Найти плотность кубика.

10.7. Если кубик льда, который в начальный момент находился при условиях, описанных в предыдущей задаче, с течением времени растает, то как изменятся уровни воды и жира в стакане?

10.8. Какая часть объема деревянного кубика окажется под водой, если его положить сверху на такой же кубик изо льда и опустить в стакан с водой? Плотность воды 1000 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3, плотность дерева 500 кг/м^3.

10.9. Изменится ли (и каким образом) уровень воды в условиях предыдущей задачи, после того как лед растает? Ответ обосновать.

10.10. В стакан с растительным маслом, плотность которого $0,92$ г/см^3, Оля положила льдинку массой 23 г. За каждую минуту 0,5 г льда превращается в воду, которая не отрывается от поверхности льда из-за поверхностного натяжения. Плотность воды 1 г/см^3, льда — $0,9$ г/см^3. Через какой промежуток времени льдинка с водой пойдут ко дну?

10.11. Сплав двух металлов в воде теряет в весе 25%. Найдите концентрации металлов в сплаве, если плотность первого металла в 2 раза, а второго в 7 раз больше плотности воды?

10.12. Гаврила любил зимнюю рыбалку. Но он знал, что если толщина льда $H < 15$ см, то ему выходить на лед опасно. Для измерения толщины льда мальчик встал около берега на льдину площадью $S = 4,5$ м^2 и померил толщину льда над поверхностью воды — $h = 1$ см. Безопасно ли выходить на лед плотностью $\rho_i = 920$ кг/м^3 Гавриле массой $M = 45$ кг? Плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м^3

10.13. Можно ли определить объем полости, заполненной воздухом, в деревянном кубе со стороной a, если он плавает в воде, погрузившись на одну десятую своего объема? Считайте, что плотность дерева в полтора раза меньше плотности воды, а весом воздуха можно пренебречь.

10.14. В одной жидкости деревянный брусок погружается на три четверти своего объема, а в другой — на половину своего объема. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси равных масс этих жидкостей, если они хорошо смешиваются? Известно, что суммарный объем этих жидкостей после смешивания не меняется.

10.15. В заполненном до краев водой и плотно закрытом аквариуме, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда 3 м$\times$4 м$\times$2 м, находятся два маленьких шарика: алюминиевый и деревянный. В начальный момент аквариум покоится, и расстояние между шариками равно 2 м. Какое наибольшее расстояние между шариками можно наблюдать, если аквариум начнет двигаться равноускоренно? Приведите пример движения, при котором достигается максимум расстояния.

10.16. На концах тонкой невесомой балки подвешены два шара, один изготовлен из чугуна, другой — из дерева. В положении равновесия точка опоры находится в середине балки. В какую сторону нужно будет сместить точку опоры для поддержания равновесия, если тот же опыт провести в безвоздушном пространстве?

10.17. Чугунный и деревянный шары движутся по гладкой горизонтальной плоскости под действием одинаковой постоянной силы. Определите отношение их ускорений, если известно, что при подвешивании этих шаров к концам тонкой невесомой балки, точка опоры в положении равновесия будет находиться в середине балки. Сопротивление воздуха не учитывать. Плотности воздуха, чугуна и дерева равны 1.3 г/дм^3, 7 кг/дм^3, 0.5 кг/дм^3 соответственно.

10.18. Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1. Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2. При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2? Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

10.19. На какую максимальную глубину H погрузится деревянный шар с плотностью ρ в два раза меньшей плотности воды ρ_0, если его сбросили с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха и воды пренебречь. Силу Архимеда считать постоянной.

10.20. Однажды Винни-Пух полез на высокий-превысокий дуб, но, добравшись до дупла с медом, сорвался, упал на землю и больно ударился. Второй раз он поднялся на воздушном шаре, наполненном газом, и завис напротив дупла. Когда ему понадобилось спуститься, Пятачок прострелил шарик, и газ стал выходить из него, при этом объем шара уменьшался по линейному закону со временем. Газа в шарике не осталось, когда Вини-Пух был на полпути к земле. Во сколько раз меньше была сила удара Пуха о землю, если длительность удара осталась той же, и он оба раза был абсолютно неупругий. Сопротивление воздуха можно не учитывать.

11 Идеальный газ

11.1 Краткие теоретические сведения

Многие ученые считают, что в рейтинге физических идей самой плодотворной является идея о том, что все вещества состоят из атомов, что все эти атомы движутся хаотически. Из этой идеи практически в одно действие можно попасть в микромир.

Рассмотрим модель идеального (или совершенного) газа. Молекулы этого газа занимают пренебрежимо малый объем и при взаимодействии ведут себя как абсолютно упругие тела. Взаимодействие между молекулами без непосредственного контакта отсутствует.

Пусть дана порция газа, масса молекулы которого равна m_0. Для простоты рассмотрим ситуацию, когда все молекулы хаотически движутся с одной скоростью v. Ударяя по стенке площади S, молекула передает ей импульс $2m_0v$ и за время $\triangle t$ все они создают импульс силы $F\triangle t$, равный $F\triangle t = 2m_0vN$, где N — количество молекул, которые успели долететь до стенки за время $\triangle t$. Это число молекул можно выразить через концентрацию молекул $n = \frac{N}{V}$ (V — объем газа) следующим образом $N = \frac{nv\triangle tS}{6}$. Коэффициент $\frac{1}{6}$ отражает хаотичность движения атомов, т.е. в каждом направлении в каждую сторону движется одинаковое количество частиц. Для давления газа p на стенку площади S получим (основное уравнение молекулярной теории):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{nm_0v^2}{3} = \frac{2}{3}n\tilde{E}.$$

Здесь $\tilde{E}$ — средняя кинетическая энергия атома или молекулы. Давление можно померить и увидеть невооруженным глазом на шкале прибора значение этой величины. То есть давление — это макроскопическая величина. А справа в формуле расположены величины микромира: скорость и масса молекулы, которые нельзя померить и увидеть непосредственно.

Для описания поведения газов не обойтись без важного понятия — термодинамического равновесия. Два тела находятся в термодинамическом равновесии, если при приведении их в контакт никакие параметры (цвет, вкус, запах и т.д.), характеризующие состояние данных тел, меняться не будут. Тогда говорят, что два тела имеют одинаковую температуру. Для газов, представляющих собой набор свободно движущихся частиц, из закона сохранения механической энергии (в данном случае речь идет только о кинетической энергии) следует, что два газа будут находиться в термодинамическом равновесии, если у них равны средние кинетические энергии атомов (или молекул). Тогда из основного уравнения молекулярной теории следует, что для двух газов, находящихся в термодинамическом равновесии, равны отношения

$$\left(\frac{p}{n}\right)_1 = \left(\frac{p}{n}\right)_2 .$$

Таким образом, для газов отношение $\theta = \frac{p}{n}$ может быть названо температурой. Так вводится термодинамическая температура θ. На практике используется шкала абсолютной температуры $\theta = kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, подобрана так, что единица шкалы абсолютной температуры равна одному градусу Цельсия. С введением абсолютной температуры основное уравнение молекулярной теории примет вид:

$$p = nkT.$$

Воспользуемся определением концентрации $n = \frac{N}{V}$ и понятием моля вещества (в одном моле находится число Авогадро $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ молекул или атомов; масса одного моля численно равна молекулярной или атомной массе вещества). Тогда окончательно получим уравнение, определяющее поведение газов (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \nu N_a kT,$$

где ν — количество молей газа, или

$$pV = \nu R_0 T = \frac{m}{\mu} R_0 T,$$

где $R_0 = 8.31$ Дж/(моль K) — универсальная газовая постоянная, m — масса порции газа, μ — молярная масса газа.

Таким образом, состояние идеального газа задается тремя величинами $(p,\ V,\ T)$, которые связаны одним уравнением. Это означает, что только два параметра можно задавать произвольно. Следовательно, состояние газа можно отождествить с точкой на плоскости (p, V), (V, T) или (T, p).

Литература: [2] С. 114 —130; [3] С. 189 — 219; [5] С. 52 — 94; [7] С. 14 — 24.

11.2 Задачи

11.1. При сжатии объем газа уменьшился от $V_0 = 7$ л до $V_1 = 4$ л. При этом давление его возросло на $\Delta p = 1,2$ атм. Определите начальное давление газа, если $T = \text{const}$.

11.2. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом баллоне объемом $V_1 = 1$ л находится газ при давлении $P_1 = 1$ атм. Во втором — объем $V_2 = 3$ л — газ при давлении $P_2 = 0,6$ атм. Какое установится давление, если кран открыть? Температуру считать постоянной.

11.3. В узкой трубке, запаянной с одного конца, находится столбик ртути длиной $l = 15$ см. Когда трубка горизонтальна, объем воздуха, запертого в трубке столбиком ртути, равен

$V_1 = 240$ мм^3. Когда трубку ставят вертикально открытым концом вверх, объем этого воздуха $V_2 = 200$ мм^3. Найдите атмосферное давление.

11.4. Из цилиндрической, запаянной с одного конца трубки частично откачали воздух. При опускании ее открытым концом в ртуть жидкость поднялась на высоту $h = 68$ см. До какого давления откачали трубку? Длина трубки $l = 75$ см, атмосферное давление $H = 750$ мм рт. ст. Нижний конец погружен в ртуть незначительно.

11.5. В закрытой частично откачанной трубке находится столбик ртути длиной $l = 3$ см. Если трубка горизонтальна, то объемы воздуха слева и справа от ртути равны. Если трубка вертикальна, то верхний объем вдвое больше нижнего. До какого давления откачали трубку?

11.6. В вертикальном цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем находится идеальный газ массой m и молярной массой μ. Поршень связан с дном сосуда пружиной жесткости k. При температуре T_1 поршень находится на высоте h_1 от дна. При какой температуре поршень будет на высоте h_2?

11.7. Под водой на глубине $H = 50$ м отломили нижний конец запаянной стеклянной трубки, и в нее вошло $m = 1,95$ г воды. Каким было давление p_0 в запаянной трубке? Объем трубки $V = 2,0$ см^3, атмосферное давление $p_A = 10^5$ Па.

11.8. Открытую с двух концов вертикальную стеклянную трубку длиной $l = 0,5$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают сверху и вынимают. Какова длина x оставшегося в трубке столбика ртути? Атмосферное давление $H = 750$ мм рт. ст.

11.9. В сосуд с ртутью опускают открытую с двух концов стеклянную трубку, оставляя над поверхностью часть трубки длиной $l = 60$ см. Затем трубку закрывают сверху и погружают еще на $a = 30$ см. Какой станет высота h столба воздуха в трубке? Атмосферное давление $H = 760$ мм рт. ст.

11.10. Трубка, запаянная с одного конца, погружена открытым концом в ртуть. При этом уровень ртути в трубке на $\Delta h = 5$ см выше, чем снаружи. Длина трубки, не занятая ртутью, $l = 50$ см. На сколько градусов необходимо поднять температуру воздуха, чтобы уровень ртути в трубке опустился до уровня снаружи. Начальная температура $t_0 = 17°C$. Атмосферное давление $P_0 = 760$ мм. рт. ст.

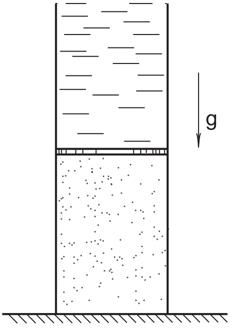
11.11. Какая часть тонкостенного стакана массы m будет высовываться из воды, если его положить на воду дном вверх? Площадь дна стакана равна S, атмосферное давление P_A.

11.12. Тонкостенный стакан кладут на поверхность воды дном вниз и он погружается ровно наполовину. На какую глубину его нужно погрузить в воду дном вверх, чтобы он уже не всплыл? Атмосферное давление $P_a = 10^5$ Па; плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3. Размерами стакана пренебречь.

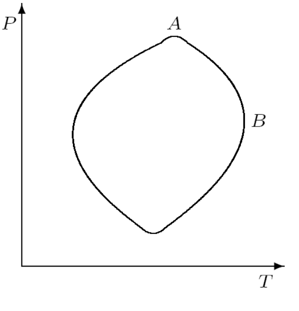
11.13. После уроков Чукин и Геков пошли купаться в пруду и, имея с собой мерный стакан для сыпучих материалов (стакан с делениями) цилиндрической формы, умудрились, донырнув до дна, померить глубину пруда в месте купания. Как им это удалось сделать? Считать атмосферное давление, плотность воды и ускорение свободного падения известными.

11.14. При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 16°C$, $t_2 = 51°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Изобразите этот процесс на PV диаграмме и укажите температуры газа во всех вершинах.

11.15. Химический реактор представляет собой цилиндрическую ёмкость высотой $L = 17,5$ м, разделенную подвижным поршнем на две камеры. Первоначально поршень находился в самом верхнем положении. Сверху на поршень налили воду так, что поршень опустился до высоты $h = 10$ м над дном реактора и в нижней камере реактора давление стало $1,75 \cdot 10^5$ Па, а температура — 63°C. До какой минимальной температуры необходимо нагреть нижнюю камеру реактора, чтобы вся вода вылилась, если атмосферное давление равно $p_\circ = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3 и ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2?



11.16. На рисунке показан замкнутый термодинамический процесс достаточно произвольной формы, происходящий с фиксированным объемом паров золота. Экспериментальная установка, на которой осуществляли данный термодинамический процесс, имеет устройство, с помощью которого можно взять пробу паров золота из рассматриваемого объема. На уроке физики



ребятам было предложено ответить на вопрос, в какой пробе окажется больше золота? Чукин считал, что в состоянии А, а Геков, что в состоянии В. Кто из них был ближе к истине? В какой точке цикла в пробе будет больше всего золота?

11.17. В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \dfrac{P}{P_0} = 8t^2 - 26t + 23 \\ \dfrac{V}{V_0} = 2t + 1 \end{cases},$$

где t — время в секундах, P_0, V_0 — известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение второй секунды данного процесса, если начальная температура равна T_0?

12 Термодинамика

12.1 Краткие теоретические сведения

Для объяснения некоторых процессов, происходящих в природе, необходимо ввести в рассмотрение понятие внутренней энергии U, так как полная механическая энергия не сохраняется. Для идеальных газов внутренняя энергия — это кинетическая энергия всех составляющих газ молекул. В отсутствие макроскопических движений заданной порции газа закон сохранения энергии примет вид:

$$\triangle U = Q - A.$$

Здесь Q — переданное газу количество теплоты, A — совершенная газом работа. В термодинамике закон сохранения энергии называют первым началом термодинамики.

Суть закона заключается в том, что в каждое состояние газа можно попасть из заданного начального состоянии различными способами, например, нагреть газ или совершить над ним работу (эквивалентность количества теплоты и механической работы была экспериментально обоснована Джоулем). Но в обоих случаях изменение внутренней энергии будет одинаковым. Говорят, что внутренняя энергия является однозначной функцией состояния газа (в отличие от количества теплоты и работы).

Так как количество теплоты зависит от процесса, то в известной формуле пропорциональности количества теплоты Q изменению температуры $T - T_0$ и массе тела m: $Q = cm(T - T_0)$ удельная теплоемкость не может быть константой и меняется в зависимости от процесса.

Для идеального газа внутренняя энергия состоит только из кинетических энергий движения молекул. Для одноатом-

ного газа
$$U = \frac{3}{2}\nu R_0 T.$$

Рассмотрим процесс, при котором $V = \mathrm{const}$. Так как перемещение границ газа отсутствует, $A = 0$. Первое начало термодинамики примет вид $Q = \triangle U = \frac{3}{2}\nu R_0 \triangle T$. Таким образом, в процессе с постоянным объемом (изохорическом) теплоемкость одного моля одноатомного газа $c = c_v = \frac{3}{2}R_0$.

Рассмотрим изобарический процесс $p = \mathrm{const}$. Такой процесс можно реализовать, поместив газ в цилиндр под поршнем. При перемещении поршня на Δx газ совершит работу $A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V = \nu R_0 \Delta T$. Записав первое начало термодинамики, получаем

$$Q = \Delta U + A = \nu c_v \Delta T + \nu R_0 \Delta T.$$

Теплоемкость одного моля в этом процессе $c_p = c_v + R_0$. Это соотношение называется формулой Майера.

В общем случае любой процесс можно сколь угодно точно приблизить последовательностью изохорических и изобарических процессов. При этом работа газа на малом изохорическом процессе равна нулю, а на малом изобарическом $A_i = pdV$. Окончательно, работа газа в любом процессе есть $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$.

Тепловой машиной называется устройство, переводящее тепловую энергию в механическую. Рабочее тело получает тепло от нагревателя и совершает работу, охлаждается, передавая тепло холодильнику. КПД тепловой машины — отношение совершенной рабочим телом работы к количеству теплоты, полученному от нагревателя.

Литература: [2] С. 131 –146, 159 – 163; [3] С. 254 – 263; [5] С. 139 –196; [7] С. 99 –118.

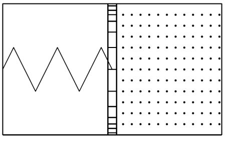
12.2 Задачи

12.1. В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа поступает за единицу времени количества тепла Q. Сосуд закрывают сверху тяжелым поршнем веса P. С какой скоростью поднимается вверх этот поршень, если его сечение равно S, а атмосферное давление p_0?

12.2. В цилиндре с площадью основания $S = 100$ см^2 находится газ при температуре $t = 27°C$. На высоте $h = 30$ см от дна цилиндра расположен поршень массой $m = 60$ кг. Какую работу совершит газ, если его температуру медленно повысить на $\Delta t = 50°C$? Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па.

12.3. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ. Поршень связан с дном цилиндра пружиной. Газ расширяется из состояния с параметрами P_1, V_1 в состояние P_2, V_2. Определите работу газа.

12.4. Определить теплоемкость одного моля одноатомного идеального газа при его работе в цилиндрическом сосуде с поршнем (см. рисунок). Поршень разделяет сосуд на две части, в одной из которых находится газ, а в другой он отсутствует. Теплообменом между газом и сосудом, поршнем и пружиной пренебречь. Известно, что длина пружины в ненапряженном состоянии равна длине сосуда.



12.5. ν молей идеального газа помещены в герметическую упругую оболочку. Упругость оболочки такова, что квадрат объема пропорционален температуре. На сколько изменится энергия оболочки, если газ нагреть от температуры T_1 до температуры T_2? Какова теплоемкость системы? Теплоемкостью оболочки и внешним давлением пренебречь.

12.6. Давление ν молей идеального газа связано с температурой по закону: $T = aP^2$ ($a = \text{const}$). Найдите работу газа при увеличении объема от значения V_1 до значения V_2. Выделяется или поглощается при этом тепло?

12.7. Один моль идеального газа нагревают сначала изотермически. При этом он совершает работу $A_1 = 10$ Дж. Затем его нагревают изобарически, сообщая ему то же количество теплоты. Какую работу совершает газ во втором случае?

12.8. Водород массой $m = 1$ кг при начальной температуре $T_1 = 300$ K охлаждают изохорически так, что его давление падает в $n = 3$ раза. Затем газ расширяют при постоянном давлении до начальной температуры. Найдите произведенную газом работу.

12.9. Баллон емкостью V_1, содержащий ν_1 молей газа при температуре T_1, соединяют с баллоном емкостью V_2, содержащим ν_2 молей того же газа при температуре T_2. Какие установятся давление и температура? Система теплоизолирована.

12.10. Один моль одноатомного идеального газа совершает циклический процесс, в котором давление газа зависит от времени по закону $P(t) = P_0 + \Delta P \sin(2\pi t/T)$, а его объем $V(t) = V_0 + \Delta V \cos(2\pi t/T)$. Какова ее средняя мощность за цикл, если $\Delta P = 0,1$ атм, $\Delta V = 2$ л, $T = 1$ с?

12.11. С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс: $P = P_0 - \alpha V$, где α — известная константа. Определите, при каких значениях объема газ получает тепло, а при каких отдает. Объем в процессе возрастает.

12.12. Найдите кпд цикла, состоящего из двух изобар и двух изохор, если в пределах цикла давление и объем изменяются в n раз. Показатель адиабаты рабочего вещества равен γ.

12.13. Тепловая машина «Ломоносов», рабочим телом в которой является идеальный газ, работает по следующему циклу. Из состояния 1 газ изохорически нагревается до состояния 2, адиабатически расширяется до состояния 3, в котором давление такое же, как и в состоянии 1. После этого происходит изохорическое понижение давления до состояния 4, из которого цикл замыкается адиабатическим сжатием. КПД этой машины η_0. КПД машины «Авогадро», работающей по циклу 1-2-3-1 отличается от КПД машины «Ломоносов» на $\alpha\%$. Определите КПД машины «Больцман», работающей по циклу 1-3-4-1. При каких допустимых значениях α машина «Ломоносов» имеет наибольший КПД среди перечисленных машин?

13 Литература

Учебники

1. Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Физика для углубленного изучения. Т.1. Механика — М.: Физматлит, 2001.

2. Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Физика для углубленного изучения. Т.3. Строение и свойства вещества — М.: Физматлит, 2001.

3. Павленко Ю. Г. Начала физики. — М.: Экзамен, 2007.

4. Физика: Механика. 10 класс: Учебник для углубленного изучения физики./Под ред. Г. Я. Мякишева. — М.: Дрофа, 2001.

5. Физика: Молекулярная физика и термодинамика. 10 класс: Учебник для углубленного изучения физики./Под ред. Г. Я. Мякишева. — М.: Дрофа, 2001.

6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. — М.: Наука. 1977

7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 4. — М.: Наука. 1977

Сборники задач с решениями

1. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Задачи по элементарной физике. — М.: Физматлит, 2000.

2. Гельфгат И.М., Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А. 1001 задача по физике с решениями. — Харьков - Москва: Независимый научно-методический центр «Развивающее обучение», 1996.

3. Гольдфарб Н. И. Физика. Задачник. — М.: Дрофа, 2000.
4. Драбович К. Н., Макаров В. А., Чесноков С. С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. — М.: Физматлит, 2006.
5. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ — 2007./Под ред. В. А. Макарова. — М.: Физический факультет МГУ, 2007.
6. Задачи по физике./Под ред. О. Я. Савченко. — М.: Наука, 1988.
7. Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А. Сборник задач по физике. — М.: Наука, 1987.
8. Меледин Г.Ф. Физика в задачах: экзаменационные задачи с решениями. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
9. Олимпиады «Ломоносов» по механике для школьников 7-11 классов. Задачи и решения./Юмашев М. В., Могилевский Е. И., Зеленский А. С. — М.: Механико - математический факультет МГУ, 2010.
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Наука. 1977
11. Черноуцан А. И. Физика. Задачи с ответами и решениями. — М.: Книжный дом «Университет», 2001.

ВВЕДЕНИЕ В СПЕЦИАЛЬНОСТЬ: МЕХАНИКА (010701.65 «Фундаментальная математика и механика»). Сборник задач.

Составители: А. С. Зеленский, Е. И. Могилевский, М. В. Юмашев.
Под общей редакцией Н. Н. Смирнова.

– М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2012 г. – 68 с., илл.

Подписано в печать
Формат: 60 х 90 1/16.
Объем: 4,25 п. л.
Заказ

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
г. Москва, Ленинские горы

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ.