ГРАВИТАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ВЕРТИКАЛЬНО ПЕРЕМЕЩАЕМЫХ СИСТЕМ

Д. В. Георгиевский

I. Двухслойная идеальная жидкость.

1. Поступательное невозмущённое движение.

$\mathbf{g} = g\mathbf{e_2}$ — сила тяжести;

h — толщина слоя идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ_1, покрывающего полупространство с другой идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ_2;

$x_2 = x_2^0(t)$ и $x_2 = h + x_2^0(t)$ — уравнения верхней и нижней границ слоя; $\dot{x}_2^0(t) = V(t)$, $x_2^0(0) = 0$.

Включим в безразмерный базис $\{\rho_1, g, h\}$. Единственный безразмерный параметр в системе — разуплотнение $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, меняющееся в пределах $-1 < \delta < \infty$.

Кинематика невозмущённого движения:

$$v_1^{\circ\{1\}} = v_1^{\circ\{2\}} \equiv 0, \quad v_2^{\circ\{1\}} = v_2^{\circ\{2\}} \equiv V(t) \tag{1.1}$$

По (1.1) на основании уравнений Эйлера

$$-p_{,i}^{\circ\{1\}} + \delta_{2i} = v_{i,t}^{\circ\{1\}} + v_{i,j}^{\circ\{1\}} v_j^{\circ\{1\}}$$

$$-p_{,i}^{\circ\{2\}} + (1+\delta)\delta_{2i} = (1+\delta)\big(v_{i,t}^{\circ\{2\}} + v_{i,j}^{\circ\{2\}} v_j^{\circ\{2\}}\big)$$

а также условия непрерывности

$$p^{\circ\{1\}}\Big|_{x_2=1+x_2^0} = p^{\circ\{2\}}\Big|_{x_2=1+x_2^0}$$

находится давление во всей системе:

$$p^{\circ\{1\}}(\mathbf{x},t) = (1-\dot{V})\big(x_2 - x_2^0(t)\big)$$

$$p^{\circ\{2\}}(\mathbf{x},t) = (1-\dot{V})\big[1 + (1+\delta)\big((x_2 - 1 - x_2^0(t)\big)\big]$$

2. Линеаризация относительно малых возмущений.

$$\mathbf{x} \in \Omega^{\{1\}} = \big\{x_2^0 + \eta^+ < x_2 < 1 + x_2^0 + \eta^-\big\} :$$

$$-p_{,i}^{\{1\}} = v_{i,t}^{\{1\}} + V v_{i,2}^{\{1\}} \equiv D_t v_i^{\{1\}}, \quad v_{i,i}^{\{1\}} = 0$$

$$\mathbf{x} \in \Omega^{\{2\}} = \big\{1 + x_2^0 + \eta^- < x_2\big\} : \tag{2.1}$$

$$-p_{,i}^{\{2\}} = (1+\delta)\big(v_{i,t}^{\{2\}} + V v_{i,2}^{\{2\}}\big) \equiv (1+\delta) D_t v_i^{\{2\}}$$

$$v_{i,i}^{\{2\}} = 0$$

Малость колебаний означает, что не только $|\eta^+| \ll 1$ и $|\eta^-| \ll 1$, но также $|\eta^+_{,1}| \ll 1$ и $|\eta^-_{,1}| \ll 1$;

$$n_1^- = -\frac{\eta^-_{,1}}{\sqrt{1+(\eta^-_{,1})^2}}, \quad n_2^- = \frac{1}{\sqrt{1+(\eta^-_{,1})^2}} \tag{2.2}$$

$$|n_1^-| \ll |n_2^-| \tag{2.3}$$

Вводя функцию тока ($\psi^{\{\nu\}}_{,2} = v_1^{\{\nu\}}$; $\psi^{\{\nu\}}_{,1} = -v_2^{\{\nu\}}$), систему (2.1) можно стандартным образом редуцировать к одному уравнению в каждой из жидкостей:

$$D_t\big(\Delta\psi^{\{\nu\}}\big) = 0, \quad \nu = 1, 2 \tag{2.4}$$

Граничные условия в возмущениях.

$$\big(v_i^{\circ\{1\}} + v_i^{\{1\}} - v_i^{\circ\{2\}} - v_i^{\{2\}}\big)\, n_i^- = 0, \quad x_2 = 1 + x_2^0 + \eta^- \tag{2.5}$$

$$p^{\circ\{1\}} + p^{\{1\}} - p^{\circ\{2\}} - p^{\{2\}} = 0, \quad x_2 = 1 + x_2^0 + \eta^- \tag{2.6}$$

Линеаризация условий (2.5) и (2.6) эквивалентна их снесению (с помощью разложения в ряды Тейлора) на вертикально движущуюся прямую $x_2 = 1 + x_2^0$:

$$v_2^{\{1\}} = v_2^{\{2\}}, \quad p^{\{1\}} = p^{\{2\}} + (1-\dot{V})\eta^-\delta, \quad x_2 = 1 + x_2^0 \tag{2.7}$$

или

$$D_t v_1^{\{1\}} = (1+\delta) D_t v_1^{\{2\}} - (1-\dot{V})\eta^-_{,1}\delta \qquad (2.8)$$

На верхней границе рассмотрим два вида условий.

а) Непротекание сквозь прямолинейную стенку:

$$v_2^{\{1\}} = 0, \quad x_2 = x_2^0 \qquad (2.9)$$

б) Свободно движущаяся граница $x_2 = x_2^0 + \eta^+$:

$$p^{\{1\}} + (1-\dot{V})\eta^+ = 0, \quad x_2 = x_2^0 \qquad (2.10)$$

или

$$D_t v_1^{\{1\}} - (1-\dot{V})\eta^+_{,1} = 0, \quad x_2 = x_2^0 \qquad (2.11)$$

К числу граничных условий следует также отнести и связи величин η^+ с $v_2^{\{1\}}$ и η^- с $v_2^{\{1\}}$:

$$\eta^+_{,t} = v_2^{\{1\}}, \ \ x_2 = x_2^0; \quad \eta^-_{,t} = v_2^{\{1\}}\big(= v_2^{\{2\}}\big), \ \ x_2 = 1 + x_2^0 \qquad (2.12)$$

3. Характеристические уравнения и анализ устойчивости.

$$\begin{gathered}\psi^{\{1\}}(x_1,x_2,t)=\Big(A_1(t)\operatorname{ch}s(x_2-x_2^0)+\\ +A_2(t)\operatorname{sh}s(x_2-x_2^0)\Big)\,\mathrm{e}^{isx_1}\\ \psi^{\{2\}}(x_1,x_2,t)=B(t)\Big(\operatorname{ch}s(x_2-x_2^0)-\\ -\operatorname{sh}s(x_2-x_2^0)\Big)\,\mathrm{e}^{isx_1}\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$D_t\psi^{\{1\}}=\Big(\dot A_1(t)\operatorname{ch}s(x_2-x_2^0)+\dot A_2(t)\operatorname{sh}s(x_2-x_2^0)\Big)\,\mathrm{e}^{isx_1}$$

Представим функции η^+ и η^- в сходной с (3.1) форме

$$\eta^+(x_1,t)=iC^+(t)\,\mathrm{e}^{isx_1},\quad \eta^-(x_1,t)=iC^-(t)\,\mathrm{e}^{isx_1}$$

и положим, что все пять амплитуд $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B(t)$, $C^+(t)$ и $C^-(t)$ имеют одну и ту же логарифмическую производную по времени $\alpha(t)$, т. е. удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$\dot A_1=\alpha A_1,\quad \dots,\quad \dot C^-=\alpha C^-\tag{3.2}$$

с решениями

$$A_1(t) = A_1(0) \exp \int\limits_0^t \alpha(\tau)\, d\tau, \quad \dots,$$

$$C^-(t) = C^-(0) \exp \int\limits_0^t \alpha(\tau)\, d\tau$$

Величина $\alpha(t)$ заранее неизвестна и представляет основной интерес для исследования устойчивости.

3.1. Непротекание сквозь прямолинейную верхнюю границу.

$$\begin{gathered} A_1 = 0, \quad A_1 \operatorname{ch} s + A_2 \operatorname{sh} s = B(\operatorname{ch} s - \operatorname{sh} s), \\ \alpha(A_1 \operatorname{sh} s + A_2 \operatorname{ch} s) = \\ = (1+\delta)\alpha B(\operatorname{sh} s - \operatorname{ch} s) + (1 - \dot{V}) C^- \delta, \\ s(A_1 \operatorname{ch} s + A_2 \operatorname{sh} s) + \alpha C^- = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Приравнивая определитель системы (3.3) нулю, придём к характеристическому уравнению

$$\alpha^2 = -\frac{s\delta \operatorname{th} s}{1 + (1+\delta) \operatorname{th} s}\,(1 - \dot{V}) \tag{3.4}$$

3.2. Свободная верхняя граница.

$$\alpha^2 = -s(1 - \dot{V}), \quad \alpha^2 = -\frac{s\delta \operatorname{th} s}{1 + \delta + \operatorname{th} s}\,(1 - \dot{V}) \tag{3.10}$$

<u>II. Вязкий слой над полупространством идеальной жидкости.</u>

4. Поступательное невозмущённое движение.

Два безразмерных параметра:

— вязкость $\mu/(\rho_1\sqrt{gh^3})$;

— разуплотнение $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$.

Кинематика невозмущённого движения:

$$v_1^{\circ\{1\}} = v_1^{\circ\{2\}} \equiv 0, \quad v_2^{\circ\{1\}} = v_2^{\circ\{2\}} \equiv V(t), \tag{4.1}$$

Давление:

$$p^{\circ\{1\}}(\mathbf{x}, t) = (1 - \dot{V})\big(x_2 - x_2^0(t)\big) \tag{4.2}$$

$$p^{\circ\{2\}}(\mathbf{x}, t) = (1 - \dot{V})\big[1 + (1 + \delta)\big((x_2 - 1 - x_2^0(t)\big)\big] \tag{4.3}$$

5. Линеаризация относительно малых возмущений.

$$\mu\Delta\Delta\psi^{\{1\}} = D_t\big(\Delta\psi^{\{1\}}\big), \quad D_t\big(\Delta\psi^{\{2\}}\big) = 0 \tag{5.1}$$

Граничные условия в возмущениях.

$$x_2 = x_2^0: \quad v_1^{\{1\}} = v_2^{\{1\}} = 0 \tag{5.2}$$

$$x_2 = 1 + x_2^0: \quad v_2^{\{1\}} = v_2^{\{2\}}, \quad v_{1,2}^{\{1\}} + v_{2,1}^{\{1\}} = 0 \tag{5.3}$$

$$-p^{\{1\}} + 2\mu v_{2,2}^{\{1\}} + (1 - \dot{V})\eta\delta = -p^{\{2\}} \tag{5.4}$$

Соотношение (5.4) продифференцируем по x_1 и подставим $p_{,1}^{\{1\}}$ и $p_{,1}^{\{2\}}$ из уравнений движения:

$$D_t v_1^{\{1\}} - \mu v_{1,kk}^{\{1\}} + 2\mu v_{2,12}^{\{1\}} + (1 - \dot{V})\eta_{,1}\delta = (1 + \delta) D_t v_1^{\{2\}} \tag{5.5}$$

К числу граничных условий следует также отнести связь величин η и $v_2^{\{1\}}$:

$$x_2 = 1 + x_2^0: \quad \eta_{,t} = v_2^{\{1\}} \big(= v_2^{\{2\}}\big), \tag{5.6}$$

6. Характеристическое уравнение.

$$\begin{gathered}\psi^{\{1\}}(x_1, x_2, t) = \big[A_1(t) \operatorname{ch} s(x_2 - x_2^0) + \\ + A_2(t) \operatorname{sh} s(x_2 - x_2^0) + \\ + A_3(t) \operatorname{ch} q(x_2 - x_2^0) + A_4(t) \operatorname{sh} q(x_2 - x_2^0)\big] \operatorname{e}^{isx_1}\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$\psi^{\{2\}}(x_1, x_2, t) = B(t) \big[\operatorname{ch} s(x_2 - x_2^0) - \operatorname{sh} s(x_2 - x_2^0)\big] \operatorname{e}^{isx_1} \tag{6.2}$$

$$\eta(x_1, t) = iC(t) \operatorname{e}^{isx_1} \tag{6.3}$$

Предположим, что введённые функции времени A_1, A_2, B, C имеют одну и ту же логарифмическую производную $\alpha(t) = \alpha_*(t) + i\alpha_{**}(t) \in C$:

$$\dot{A}_1 = \alpha A_1,\ \ldots,\ \dot{C} = \alpha C$$

Пусть, кроме того, оставшиеся в (6.1) амплитуды A_3 и A_4 удовлетворяют уравнениям $\dot{A}_3 = \beta A_3$, $\dot{A}_4 = \beta A_4$, где $\beta = \beta_* + i\beta_{**} \in C$ не зависит от t. Выбрав в (6.1) связь волновых чисел q и s в виде

$$q^2 = s^2 + \frac{\beta}{\mu}, \quad q \in C, \tag{6.4}$$

заметим, что уравнения движения удовлетворятся.

Таким образом,

$$\begin{gathered} (A_1; A_2; B; C)(t) = (A_1; A_2; B; C)(0) \exp \int\limits_0^t \alpha(\tau)\, d\tau \\ (A_3; A_4)(t) = (A_3; A_4)(0)\, \mathrm{e}^{\beta t} \end{gathered} \tag{6.5}$$

Условием, связывающим $\alpha(t)$ и β, естественно принять следующее:

$$\alpha(t) \equiv \beta = \mathrm{const}, \quad \text{если} \quad \dot{V} \equiv 0 \tag{6.6}$$

Однородная система граничных условий:

$$A_1 + A_3 = 0, \quad sA_2 + qA_4 = 0$$

$$A_1 c_s + A_2 s_s + A_3 c_q + A_4 s_q = B(c_s - s_s) = -\frac{\alpha C}{s}$$

$$2s^2(A_1 c_s + A_2 s_s) + (q^2 + s^2)(A_3 c_q + A_4 s_q) = 0$$

$$(\alpha + 2\mu s^2)(A_1 s_s + A_2 c_s) + 2\mu s q(A_3 s_q + A_4 c_q) -$$

$$-\delta(1 - \dot{V})C = (1 + \delta)\alpha B(s_s - c_s),$$

$$c_s = \operatorname{ch} s, \quad s_s = \operatorname{sh} s, \quad c_q = \operatorname{ch} q, \quad s_q = \operatorname{sh} q,$$

Характеристическое уравнение рассматриваемой задачи:

$$K\alpha^2(t) + L\alpha(t) + M = 0 \tag{6.7}$$

$$K = (1 + \delta)(q^2 - s^2)(q c_q s_s - s s_q c_s) +$$

$$+(q^2 + s^2)(q c_q c_s - s s_q s_s) - 2qs^2;$$

$$L = 2\mu s^2(q^2 + s^2)(q c_q c_s - s s_q s_s) +$$

$$+4\mu q s^3(s c_q c_s - q s_q s_s) - 2\mu q s^2(q^2 + 3s^2);$$

$$M = \delta s(1 - \dot{V})(q^2 - s^2)(q c_q s_s - s s_q c_s)$$

7. Асимптотический предел большой вязкости.

$$1/\mu = \varepsilon \ll 1; \quad \rho_1\sqrt{gh^3}/\mu \ll 1$$

Осуществляя поиск решения уравнения (6.7)

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \ldots$$

$$K = K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots, \quad L = L_0 + \varepsilon L_1 + \ldots,$$

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots$$

$$K_0 = L_0 = M_0 = M_1 = 0, \quad K_1 = \beta_0 s c_s^2, \quad L_1 = \beta_0^2 s^3,$$

$$M_2 = \beta_0^2 \delta (1 - \dot{V})(c_s s_s - s)/2,$$

получим в нулевом по ε приближении

$$K_1\alpha_0^2 + L_1\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = \beta_0 \tag{6.8}$$

Отсюда следует, что $\alpha_{01}(t) = \alpha_{02}(t) \equiv 0$, $\beta_{01} = \beta_{02} = 0$, т. е. предел $\mu \to \infty$ соответствует переходу к статическому положению, при котором начальная форма возмущений вдоль оси (Ox_1) меняться не будет.

С учётом этого следующее (первое ненулевое) приближение, получающееся приравниванием нулю коэффициента при ε^3 в разложении всех членов уравнения (6.7), даёт

$$\alpha_1 = -\frac{F(s)\delta}{2c_s^2}\left[\sqrt{s^4 + 4c_s^2(c_s^2+s^2)(1-\dot{V})} - s^2\right],$$

$$\beta_1 = -F(s)\delta \in R$$

$$F(s) = \frac{c_s s_s - s}{2s(c_s^2+s^2)} > 0,$$

$$\alpha(t) = \varepsilon\alpha_1(t) + O(\varepsilon^2), \quad \beta = \varepsilon\beta_1 + O(\varepsilon^2)$$

Случай равноускоренного движения:

$$\dot{V}(t) \equiv \dot{V}_0 = \mathrm{const} \Rightarrow \alpha_1(t) = \mathrm{const}$$

$$\begin{array}{ccc} & \dot{V}_0 < 1 & \dot{V}_0 > 1 \\ \delta > 0 & \searrow\swarrow & \nearrow\swarrow \\ -1 < \delta < 0 & \nearrow\nwarrow & \searrow\nwarrow \end{array}$$

Условными знаками $\nearrow$ и $\searrow$ обозначены утверждения соответственно об экспоненциальном росте и затухании функций $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B(t)$, $C(t)$. Знаками $\nwarrow$ и $\swarrow$ обозначены аналогичные утверждения для функций $A_3(t)$, $A_4(t)$.