МДТТ ЛЕКЦИЯ №10 (21.04.2020)

Основы теории вязкоупругости. Часть 2.

Профессор В.И. Горбачев. Кафедра механики композитов.

Введение.

В первой части были рассмотрены подходы к построению линейных определяющих соотношений математической теории вязкоупругости. Рассмотрены одномерные случаи, которые позволяют давать строгую математическую постановку одномерных задач и развивать методы их решения. Кроме того определяющие соотношения одномерного подхода специально строились так, чтобы их можно было обобщить на трёхмерный случай.

Вторая часть лекции по вязкоупругости целиком посвящена трёхмерным задачам.

1 Обобщение простейших моделей на трёхмерный случай.

1.1 Общий вид определяющих соотношений для неоднородного анизотропного вязкоупругого тела.

Поведение деформируемого твердого тела при сложном напряженно деформированном состоянии характеризуется тензором деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}$ и тензором напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$. Эти симметричные тензоры второго ранга в случае линейной теории упругости вязкоупругости связаны между собой с помощью тензоров четвертого ранга. Основываясь на результатах первой части лекции, запишем определяющие соотношения трёхмерной теории вязкоупругости в декартовых координатах в представлении Больцмана

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(x,t,\tau) d_\tau \varepsilon_{kl}(x,\tau)\,, \qquad \varepsilon_{ij}(x,t) = \int\limits_0^t \Pi_{ijkl}(x,t,\tau) d_\tau \sigma_{kl}(x,\tau)\,, \tag{1.1}$$

где $x(x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты материальной точки неоднородного тела из вязкоупругого материала, σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, R_{ijkl} и Π_{ijkl} — компоненты тензоров функций релаксации и ползучести. Интегрирование по частям в формулах (1.1) даёт другую, эквивалентную, запись определяющих соотношений

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij}(x,t) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(x,t) - \int\limits_{0-}^t \widetilde{\Gamma}_{ijkl}(x,t,\tau)\varepsilon_{kl}(x,\tau) d_\tau\,, \\
C_{ijmn}(x) = R_{ijkl}(x,t,t)\,, \qquad \widetilde{\Gamma}_{ijkl}(x,t,\tau) = \frac{\partial R_{ijkl}(x,t,\tau)}{\partial \tau}\,, \\
\varepsilon_{ij}(x,t) = J_{ijkl}(x)\sigma_{kl}(x,t) + \int\limits_{0-}^t \widetilde{K}_{ijkl}(x,t,\tau)\sigma_{kl}(x,\tau) d_\tau\,, \\
J_{ijmn}(x) = R_{ijkl}(x,t,t)\,, \qquad \widetilde{K}_{ijkl}(x,t,\tau) = -\frac{\partial \Pi_{ijkl}(x,t,\tau)}{\partial \tau}\,.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь C_{ijkl} и J_{ijkl} — компоненты взаимнообратных тензоров мгновенных модулей упругости и податливости, а $\widetilde{K}_{ijkl}$ и $\widetilde{\Gamma}_{ijkl}$ — компоненты тензоров регулярных ядер ползучести и релаксации. Эти тензоры связаны между собой соотношениями

$$\begin{gathered}
C_{ijmn}(x)J_{mnkl}(x) = J_{ijmn}(x)C_{mnkl}(x) = \Delta_{ijkl} = \frac{1}{2}\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)\,, \\
\int\limits_0^t \widetilde{K}_{ijmn}(x,t,\tau)\widetilde{\Gamma}_{mnkl}(x,\tau,\tau_1) d\tau + J_{ijmn}(x)\widetilde{\Gamma}_{mnkl}(x,t,\tau_1) = C_{ijmn}(x)\widetilde{K}_{mnkl}(x,t,\tau_1)\,.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

В дальнейшем будем рассматривать только нестареющие материалы.

1.2 Случай изотропного вязкоупругого тела.

Представим напряжения и деформации в виде суммы девиаторов и шаровых частей

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}\,, \qquad \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}\,, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ — объёмная деформация (дилатация), $\sigma = \sigma_{ii}/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \varepsilon_{33})/3$ — среднее объёмное напряжение (в жидкости среднее напряжение с обратным знаком называется гидростатическим давлением).

В упругом изотропном теле напряжения связаны с деформациями по обобщенному закону Гука

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\Delta_{ijkl})\varepsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \\
s_{ij} + \sigma\delta_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon + 2\mu(e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}) = 2\mu e_{ij} + \big(\lambda + \frac{2}{3}\mu\big)\varepsilon \quad \Rightarrow \\
s_{ij} = 2\mu e_{ij} = 2Ge_{ij}\,, \qquad \sigma = \big(\lambda + \frac{2}{3}\mu\big)\varepsilon = K\varepsilon\,,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\mu \equiv G$ — различные обозначения модуля сдвига, а $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — модуль объёмного растяжения (сжатия)[1]. Таким образом, **в упругом теле определяющие соотношения можно представить в виде двух независимых взаимнообратных соотношений $s_{ij} \sim e_{ij}$ и $\sigma \sim \varepsilon$.**

Аналогичная ситуация имеет место и в изотропном вязкоупругом случае, то есть вместо (1.1) можно написать

$$
\begin{aligned}
s_{ij}(x,t) &= \int\limits_0^t R(x,t-\tau)d_\tau e_{ij}(x,\tau)\,, \qquad \sigma(x,t) = \int\limits_0^t R_1(x,t-\tau)d_\tau \varepsilon(x,\tau)\,, \\
e_{ij}(x,t) &= \int\limits_0^t \Pi(x,t-\tau)d_\tau s_{ij}(x,\tau)\,, \qquad \varepsilon(x,t) = \int\limits_0^t \Pi_1(x,t-\tau)d_\tau \sigma(x,\tau)\,,
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

где $R(x,t-\tau)$ и $R_1(x,t-\tau)$ — функции сдвиговой и объёмной релаксации, а $\Pi(x,t-\tau)$ и $\Pi_1(x,t-\tau)$ — соответственно, функции сдвиговой и объёмной ползучести.

Формулы, аналогичные формулам (1.2), имеют вид:

$$
\begin{aligned}
s_{ij}(x,t) &= 2G(x)\varepsilon_{ij}(x,t) - \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}(x,t-\tau)\varepsilon_{ij}(x,\tau)d_\tau\,, \\
\sigma(x,t) &= K(x)\varepsilon(x,t) - \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma_1}(x,t-\tau)\varepsilon(x,\tau)d_\tau\,, \\
\varepsilon_{ij}(x,t) &= \frac{1}{2G(x)}\sigma_{ij}(x,t) + \int\limits_0^t \widetilde{K}(x,t-\tau)\sigma_{ij}(x,\tau)d_\tau\,, \\
\varepsilon(x,t) &= \frac{1}{K(x)}\sigma(x,t) + \int\limits_0^t \widetilde{K}(x,t-\tau)\sigma(x,\tau)d_\tau\,.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

1.3 Преобразование Лапласа–Карсона (Л-К).

Для решения задач линейной теории вязкоупругости широко применяется интегральное преобразование Лапласа–Карсона [1, стр. 88]. Это преобразование применяется к функциям, определённым на полубесконечном интервале $[0,\infty)$

$$
f^*(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \equiv \mathbb{L}(f) \tag{1.8}
$$

Функция $f^*(p)$ называется изображением, а функция $f(t)$ — оригиналом. Аргумент p может быть как действительным, так и комплексным.

Оригинал должен удовлетворять следующим условиям:

1.) $f(t)$ — область определения $t \in [0,\infty)$,кусочно непрерывная функция;

2.) $|f(t)| < me^{s_0 t}$ при $t \to \infty$, $m > 0$, $s_0 > 0$ — показатель роста $f(t)$.

[1] В первой части лекции по вязкоупругости буквой K обозначалось ядро ползучести. Здесь же K — принятое во многих источниках обозначение объёмного модуля. Как правило, это не приводит к путанице.

Обратное преобразование называется преобразованием Мелина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa - i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp\,. \tag{1.9}$$

Интегрирование ведётся вдоль вертикальной прямой с абциссой $\varkappa$.

Основные свойства преобразования Лапласа–Карсона:

$$\mathbf{1.})\mathbb{L}\Big(\int\limits_{0-}^{t} f(t-\tau)dg(\tau)\Big) = f^*(p)g^*(p)\,,\ if\ \ g(0-) = 0\,,$$

$$\mathbf{2.})\mathbb{L}\Big(\int\limits_{0-}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\Big) = \frac{1}{p} f^*(p)g^*(p)\,,$$

$$\mathbf{3.})\mathbb{L}\big(\dot f(t)\big) = p\big(f^*(p) - f(0)\big)\,, \qquad \mathbb{L}\big(\ddot f(t)\big) = p\Big[\big(f^*(p) - f(0) - \dot f(0)\big)$$

Доказательство первого свойства приведено в [1, стр. 88][2]

1.4 Преобразование определяющих соотношений теории вязкоупругости в форме Больцмана для изотропной среды .

Применим преобразование Лапласа–Карсона к соотношениям (1.6)

$$\begin{array}{ll} s^*_{ij}(x,p) = R^*(x,p)e^*_{ij}(x,p)\,, & \sigma^*(x,p) = R^*_1(x,p)\varepsilon^*(x,p)\,, \\ e^*_{ij}(x,t) = \Pi^*(x,p)s^*_{ij}(x,p)\,, & \varepsilon^*(x,p) = \Pi^*_1(x,p)\sigma^*(x,p) \end{array} \tag{1.10}$$

Из соотношений (1.10) вытекает связь между изображениями ядер релаксации и ползучести

$$\boldsymbol{R^*(x,p)\Pi^*(x,p) = 1\,, \qquad R^*_1(x,p)\Pi^*_1(x,p) = 1} \tag{1.11}$$

[2]Считаем, что $f(0-) = 0$ и $g(0-) = 0$, тогда

$$\psi^*(p) = p\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-pt}\Big[\int\limits_{0-}^{t} f(t-\tau)dg(\tau)\Big]dt = p\int\limits_{0-}^{\infty}\Big[\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau)dt\Big]dg(\tau) =$$

$$= \int\limits_{0-}^{\infty} e^{-p\tau}\Big[p\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} f(t-\tau)dt\Big]dg(\tau) = \int\limits_{0-}^{\infty} e^{-p\tau}\Big[p\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} f(t-\tau)dt\Big]dg(\tau) =$$

$$= f^*(p)\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-p\tau}dg(\tau) = f^*(p)\Big[g(0-) + p\int\limits_{0-}^{\infty} e^{-p\tau}g(\tau)d\tau\Big] = f^*(p)g^*(p).$$

Аналогично получается формула для преобразования другого типичного соотношения теории вязкоупругости

$$\psi(t) = \int\limits_{0-}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad \Rightarrow \qquad \psi^*(p) = \frac{1}{p} f^*(p)g^*(p)$$

1.5 Аналогия между изображениями определяющих соотношений вязкоупругости и соотношениями классической теории упругости.

Введём новые обозначения

$$\boldsymbol{R^* = 2G^*} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{s^*_{ij} = 2G^* e^*_{ij}}}; \qquad\qquad \boldsymbol{R^*_1 = K^*} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\sigma^* = K^* \varepsilon^*}} \tag{1.12}$$

Тогда соотношения (1.10) полностью совпадают с соотношениями классической линейной теории упругости, только ***изображение модуля сдвига и модуля объёмного сжатия являются операторами***, том смысле, что, к примеру, произведение изображения $2G^*$ на изображение e^*_{ij} есть преобразование Лапласа–Карсона от свёртки, то есть от интеграла Стильтьеса

$$\boldsymbol{2G^* e^*_{ij} = \mathbb{L}\Big(\int\limits_{0-}^{t} 2G(t-\tau) de(\tau) \Big) = \mathbb{L}\Big(\int\limits_{0-}^{t} R(t-\tau) de(\tau) \Big)}$$

В теории упругости все другие упругие коэффициенты, как то параметры Ламе λ, μ, коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E, выражаются через модуль сдвига G и модуль объёмного сжатия K. Следовательно, каждому из этих коэффициентов можно поставить в соответствие соответствующие изображения-операторы, которые выражаются через изображения исходных операторов G^* и K^*, а значит через R^* и R^*_1 [1, стр. 89]

$$\begin{aligned} \lambda^* = K^* - \frac{2}{3}G^* = R^*_1 - \frac{R^*}{3}, \qquad \mu^* = G^* = \frac{R^*}{2}, \\ \nu^* = \frac{3K^* - 2G^*}{6K^* + 2G^*} = \frac{3R^*_1 - R^*}{6R^*_1 + R^*}, \qquad E^* = \frac{9K^*G^*}{3K^* + G^*} = \frac{9R^*_1 R^*}{6R^*_1 + R^*} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Вместо коэффициента Пуассона ν и оператора ν^*, во многих задачах, удобнее выбрать другой коэффициент ω_0 и ему соответствующий оператор ω^*.

$$\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}, \qquad \omega^* = \frac{1}{3} R^* \Pi^*_1 = \frac{1-2\nu^*}{1+\nu^*}} \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{\nu = \frac{1-\omega_0}{2+\omega_0}, \qquad \nu^* = \frac{1-\omega^*}{2+\omega^*} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega_0} - 1} \tag{1.15}$$

Обратный оператор к оператору ω^* обозначим π^*, так что

$$\boldsymbol{\omega^* \pi^* = 1} \tag{1.16}$$

1.6 Случай рациональной зависимости решения упругой задачи от коэффициента Пуассона. Операторы Ильюшина.

Как показано в работе [2], в основных линейных задачах теории упругости, перемещения, деформации и напряжения являются рациональными функциями коэффициента Пуассона.[3] Следовательно, перемещения, деформации

[3]Рациональная функция есть отношение двух полиномов конечной степени от коэффициента Пуассона.

и напряжения являются также рациональными функциями безразмерного параметра ω_0.

Безразмерный коэффициент упругого материала ω_0 и соответствующий ему оператор ω^* удобны тем, что любую рациональную функцию от ω_0 можно представить в виде полинома от от ω_0 и конечной суммы элементарных дробей. Рассмотрим наиболее простой случай, когда в результате решения какой либо задачи теории упругости получилось выражение вида[4]

$$\Phi(\omega_0) = \Phi_0 + \Phi_1\omega_0 + \Phi_{-1}\omega_0^{-1} + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i g_{\beta_i}(\omega_0)\,, \qquad g_{\beta_i}(\omega_0) \equiv \frac{1}{1+\beta_i\omega_0} \tag{1.17}$$

Функция $\Phi(\omega_0)$ представляют собой перемещения, деформации, напряжения и другие скалярные, векторные, тензорные и другие физические величины, в которых присутствуют упругие константы ω_0. Функции Φ_{-1}, Φ_0, Φ_1, $\Psi_i, \ldots$ зависят от заданных на границе перемещений и нагрузок, а также от координат. Но они не зависят от ω_0. Коэффициенты β_i также не зависят от ω_0 и являются константами.

Перейдём в выражении (1.17) к изображениям

$$\Phi(\omega^*) = \Phi_0 + \Phi_1\omega^* + \Phi_{-1}\pi^* + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i g^*_{\beta_i}\,, \qquad g^*_{\beta_i} \equiv \frac{1}{1+\beta_i\omega^*} \tag{1.18}$$

После этого, решение соответствующей задачи для вязкоупругого тела выписывается в виде свёрток

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t \omega(t-\tau)d\Phi_1(\tau) + \int_0^t \pi(t-\tau)d\Phi_{-1}(\tau) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t g_{\beta_i}(t-\tau)d\Psi_i(\tau) \tag{1.19}$$

Операторы g^*_β, где β — числовой параметр, построены на основе оператора ω^*. Они были введены А.А. Ильюшиным и называются операторами Ильюшина. *В случае упругого изменения объёма* Алексей Антонович Ильюшин предложил находить функции $g_\beta(t)$ из простых экспериментов на релаксацию или ползучесть образца из исследуемого материала, к которому параллельно или последовательно присоединена пружина с жесткостью, зависящей от числа β. [3, стр. 163]

1.7 Случай слабой объёмной ползучести и релаксации (практически упругая объёмная деформация).

В этом случае функции объёмной релаксации и ползучести можно положить постоянными величинами (приблизительно) $R_1 = 1/\Pi_1 = K = \text{const.}$, тогда, согласно (1.14)

$$\omega_0 = \frac{1-2\nu}{1+\nu} = \frac{2G}{3K} \quad\Rightarrow\quad \omega(t) = \frac{R(t)}{3K}\,, \qquad \pi(t) = \frac{1}{\omega(t)} = \frac{3K}{R(t)} = 3K\Pi(t) \tag{1.20}$$

В данном случае функции $\omega(t)$ и $\pi(t)$ представляют собой безразмерные аналоги функции релаксации и функции ползучести. Функция $g_\beta(t)$, представляющая собой оригинал оператора А.А. Ильюшина

$$g^*_\beta = \frac{1}{1+\beta\omega^*} = \frac{3K}{3K+\beta R^*} = \frac{3K\Pi^*}{\beta+3K\Pi^*}\,, \tag{1.21}$$

[4] Более общая зависимость от ω_0 рассмотрена в книге [1, стр. 208]

находится экспериментально. Методика эксперимента излагается в работах [3, стр. 83, 165], [1, стр. 111-112].

2 Статические и динамические задачи теории вязкоупругости.

Постановка линейной задачи теории вязкоупругости состоит из уравнений движения, определяющих соотношений, соотношений Коши, граничных и начальных условий. Рассмотрим вначале общую динамическую задачу

2.1 Постановка динамической задачи теории вязкоупругости.

Выпишем последовательно все перечисленные уравнения для самого общего случая линейной задачи для неоднородного анизотропного нестареющего вязкоупругого тела объёма V, ограниченного поверхностью Σ

$$\sigma_{ij,j} + X_i(x,t) = \varrho(x)\ddot{u}_i \,, \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(x,t-\tau)d_\tau \varepsilon_{kl}(x,\tau)\,, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \Delta_{ijkl}u_{k,l}(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_{i,j} + u_{j,i}\big)\,, \tag{2.3}$$

$$u_i\big|_{\Sigma_u} = \varphi_i(y,t)\,, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_P} = P_i(y,t)\,, \qquad y \in \Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_P\,, \tag{2.4}$$

$$u_i(x,0) = f_i(x)\,, \qquad \dot{u}_i(x,0) = g_i(x) \tag{2.5}$$

Применим ко всем уравнениям преобразование Лапласа–Карсона и перепишем уравнения (2.1)-(2.5) в изображениях

$$\sigma^*_{ij,j}(x,p) + X^*_i(x,p) = \varrho(x)p\big[p\big(u^*_i(x,p) - f_i(x)\big) - g_i(x)\big]\,, \tag{2.6}$$

$$\sigma^*_{ij}(x,p) = R^*_{ijkl}(x,p)\varepsilon^*_{kl}(x,p)\,, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon^*_{ij}(x,p) = \Delta_{ijkl}u^*_{k,l}(x,p) = \frac{1}{2}\big(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}\big)\,, \tag{2.8}$$

$$u^*_i\big|_{\Sigma_u} = \varphi^*_i(y,p)\,, \quad \sigma^*_{ij}n_j|_{\Sigma_P} = P^*_i(y,p)\,, \qquad y \in \Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_P\,, \tag{2.9}$$

Начальные условия автоматически вошли в правую часть преобразованных уравнений движения (2.6). В изображениях из уравнений движения получились уравнения Гельмгольца, единственное решение которых выявляется с помощью граничных условий (2.9).

2.2 Статическая задача теории вязкоупругости.

Статическая задача вязкоупругости понимается в том смысле, что в исходных уравнениях движения можно пренебречь инерционными эффектами. При этом, время всё равно остаётся. Перемещения, деформации и напряжения меняются во времени, только скорость этих изменений мала. Поэтому такую задачу следовало бы назвать квазистатической, но в изображениях задача полностью эквивалентна статической задаче теории упругости.

Уравнения теории упругости

$$\sigma_{ij,j} + X_i(x,t) = 0\,,\ \ \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = 2G(x)e_{ij}\,,$$

$$\sigma = K(x)\varepsilon\,,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{ii}\,,\ \ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\,\delta_{ij}/3$$

$$\varepsilon_{ij} = \big(u_{i,j} + u_{j,i}\big)/2$$

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = \varphi_i(y,t)\,,\ \ \sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = q_i(y,t)$$

Уравнения теории вязкоупругости

$$\sigma_{ij,j} + X_i(x,t) = 0\,,\ \ \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$$

$$s_{ij} = \int\limits_0^t R(x,t-\tau)de_{ij}(\tau)\,,$$

$$\sigma = \int\limits_0^t R_1(x,t-\tau)d\varepsilon(\tau)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{ii}\,,\ \ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\,\delta_{ij}/3$$

$$\varepsilon_{ij} = \big(u_{i,j} + u_{j,i}\big)/2$$

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = \varphi_i(y,t)\,,\ \ \sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = q_i(y,t)$$

Здесь представлены слева уравнения равновесия упругого неоднородного изотропного тела. Справа — такие уравнения для вязкоупругого тела.

Запишем далее уравнения равновесия вязкоупругого тела в изображениях

Уравнения теории вязкоупругости в изображениях

$$\sigma^*_{ij,j} + X^*_i(x) = 0\,,\ \ \sigma^*_{ij} = s^*_{ij} + \sigma^*\delta_{ij}$$

$$s^*_{ij} = R^*(x)e^*_{ij}\,,$$

$$\sigma^* = R^*_1(x)\varepsilon^*$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*_{ii}\,,\ \ e^*_{ij} = \varepsilon^*_{ij} - \varepsilon^*\,\delta_{ij}/3$$

$$\varepsilon^*_{ij} = \big(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}\big)/2$$

$$u^*_i\big|_{\Sigma_1} = \varphi^*_i(y)\,,\ \ \sigma^*_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = q^*_i(y)$$

Здесь величины со звездочкой — изображения оригиналов, к которым применено преобразование Лапласа–Карсона, следовательно все изображения зависят от параметра p. Однако эта зависимость везде опущена с целью упрощения записи. Если в этих уравнениях обозначить $R^* = 2G^*$ и $R^*_1 = K^*$, а потом опустить звездочки то получим в точности уравнения теории равновесия упругого неоднородного тела.

2.3 Метод аппроксимаций А.А. Ильюшина.

Основные трудности получения точных решений задач вязкоупругости по точным решениям задач теории упругости состоят в обращении решения в изображениях, то есть, к получению оригиналов по упругому решению. Во многих случаях проблема получения оригиналов по изображениям представляет существенные трудности. В 1968 году А.А. Ильюшин разработал и опубликовал приближенный подход к решению подобных задач (смотри [3, стр. 74]), названный им методом аппроксимаций. Отметим, что в некоторых случаях метод аппроксимаций приводит к точному решению задачи вязкоупругости.

В методе аппроксимаций А.А. Ильюшина предполагается что:

1. Функции релаксации и ползучести задаются либо аналитически, либо экспериментальными графиками.

2. Области задания граничных условий не меняются во времени.

3. Искомые величины типа перемещений, деформаций, напряжений, изгибающих моментов, максимальных прогибов и т.п., являются рациональными функциями коэффициента Пуассона и могут быть записаны или же аппроксимированы формулами типа (1.17).

$$\Phi(\omega_0) = \Phi_0 + \Phi_1\omega_0 + \Phi_{-1}\omega_0^{-1} + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i g_{\beta_i}(\omega_0)\,, \qquad g_{\beta_i}(\omega_0) \equiv \frac{1}{1+\beta_i\omega_0}$$

2.4 Задача о бесконечной вязкоупругой трубе под давлением.

Пусть $p_a(t)$ и $p_b(t)$ — внутреннее и внешнее давления в бесконечной цилиндрической трубе с внутренним радиусом $r = a$ и внешним $r = b$. Эта задача является задачей о плоском деформированном состоянии.

Уравнение равновесия в цилиндрической системе координат одно, и оно имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0 \tag{2.10}$$

Решение этого уравнения будет следующим:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2}\,, \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = A - \frac{B}{r^2} \tag{2.11}$$

Граничные условия в этой задаче $\sigma_{rr}(a) = -p_a(t)$, $\sigma_{rr}(b) = -p_b(t)$, из которых находим

$$A(t) = \frac{a^2b^2\left[p_b(t)-p_a(t)\right]}{b^2-a^2}\,, \qquad B(t) = \frac{a^2p_a(t)-b^2p_b(t)}{b^2-a^2} \tag{2.12}$$

Отсюда и из (2.11) следует, что **радиальное и кольцевое напряжения не зависят от упругих констант. Таким образом, точно такие же напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ будут и в вязкоупругой трубе.**

$$\sigma_{rr}(t) = A(t) + \frac{B(t)}{r^2}\,, \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta}(t) = A(t) - \frac{B(t)}{r^2} \tag{2.13}$$

В задаче о плоской деформации упругой трубы имеются ещё и продольные напряжения σ_{zz}

$$\sigma_{zz}(t) = -\nu\big(\sigma_{rr}+\sigma_{\vartheta\vartheta}\big) = -2\nu A(t) = -2\,\frac{1-\omega_0}{2+\omega_0}\,A(t) = -\Big(\tfrac{3}{2}\,g_{1/2}-1\Big)A(t)\,, \tag{2.14}$$

где

$$g_{1/2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\omega_0} \tag{2.15}$$

Минуя запись в изображениях, сразу можно записать зависимость продольного напряжения от времени в вязкоупругой трубе

$$\sigma_{zz}(t) = A(t) - \frac{3}{2}\int\limits_0^t g_{1/2}(t-\tau)dA(\tau) \tag{2.16}$$

Если материал трубы не обладает объёмной релаксацией, то в соответствии с формулами (1.20), получаем

$$g_{1/2}(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\omega(t)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6K}R(t)} \approx 1 - \tfrac{1}{6K}R(t)\,, \tag{2.17}$$

В этом случае вместо формулы (2.16) получаем приближенное выражение:

$$\sigma_{zz}(t) \approx -\frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{6K}\int\limits_0^t R(t-\tau)dA(\tau) \tag{2.18}$$

Радиальное перемещение точек трубы в упругом случае определяется по формуле

$$u_r(r,t) = \frac{\varkappa - 1}{4G}A(t)r + \frac{B(t)}{2Gr} \tag{2.19}$$

где

$$\varkappa = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} = 3 - 4\nu = 7 - 6g_{1/2}\,, \qquad \text{— плоская деформация.}$$

$$\varkappa = \frac{5\lambda + 6G}{3\lambda + 2G} = \frac{3-\nu}{1+\nu} = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\omega_0\,, \qquad \text{— плоское напр. состояние.}$$

$$\frac{\varkappa - 1}{4G} = \frac{1 - g_{1/2}}{K\omega_0} = \frac{1}{2K}g_{1/2} = \frac{1}{2}\Pi_1\, g_{1/2}\,, \qquad \text{— плоская деформация.} \tag{2.20}$$

$$\frac{\varkappa - 1}{4G} = \frac{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\omega_0 - 1}{6K\omega_0} = \frac{2 + \pi_0}{9K} = \frac{1}{9}\big(2\Pi_1 + \Pi_1\pi_0\big)\,, \qquad \text{— плоское напр. состояние.} \tag{2.21}$$

При отсутствии объёмной релаксации переход к оригиналам довольно прост

$$u_r(r,t) = \frac{r}{2K}\int\limits_0^t g_{1/2}(t-\tau)dA(\tau) + \frac{1}{r}\int\limits_0^t \Pi(t-\tau)dB(\tau)\,, \qquad \text{— пл. деформация.} \tag{2.22}$$

$$u_r(r,t) = \frac{r}{9K}\int\limits_0^t \big[2 + \pi(t-\tau)\big]dA(\tau) + \frac{1}{r}\int\limits_0^t \Pi(t-\tau)dB(\tau)\,, \qquad \text{— пл. напр. сост.} \tag{2.23}$$

В общем случае вводим промежуточные обозначения:

$$Q_1(t) = \int\limits_0^t \Pi_1(t-\tau)dg_{1/2}(\tau)\,, \qquad Q_2(t) = \int\limits_0^t \Pi_1(t-\tau)d\pi(\tau)\,, \tag{2.24}$$

тогда

$$u_r(r,t) = \frac{r}{2}\int\limits_0^t Q_1(t-\tau)dA(\tau) + \frac{1}{r}\int\limits_0^t \Pi(t-\tau)dB(\tau)\,, \qquad \text{— пл. деформация.} \tag{2.25}$$

$$u_r(r,t) = \frac{r}{9}\int\limits_0^t Q_2(t-\tau)dA(\tau) + \frac{1}{r}\int\limits_0^t \Pi(t-\tau)dB(\tau)\,, \qquad \text{— пл. напр. состояние.} \tag{2.26}$$

Список литературы

[1] Ильюшин А.А.,Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости.* Наука, Москва, 1970.

[2] Купрадзе В.Д. *Методы потенциала в теории упругости.* Физматгиз, Москва, 1963.

[3] Ильюшин А.А. *Труды. Т.3. Теория термовязкоупругости.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2007.