

МДТТ ЛЕКЦИЯ №11 (30.04.2020)

Теория пластичности. Часть I.

Теория малых упругопластических деформаций.

Профессор В.И. Горбачев. Кафедра механики композитов.

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Диаграмма растяжения. Условная и истинная диаграммы напряжений. | 2 |
| 1.1 | Диаграмма растяжения. | 2 |
| 1.2 | Условная и истинная диаграммы напряжений. | 3 |
| 1.3 | Описание диаграммы напряжений. | 4 |
| 1.3.1 | Участок линейной и нелинейной упругости. Предел упругости. . . | 4 |
| 1.3.2 | Площадка текучести. Предел текучести. Зуб текучести. | 4 |
| 1.3.3 | Аддитивность упругой и пластической деформации. | 5 |
| 1.3.4 | Эффект Баушингера. | 5 |
| 1.3.5 | Разгрузка и повторное нагружение. Петля гистерезиса. | 5 |
| 1.3.6 | Эффект упрочнения материала. | 5 |
| 1.3.7 | Деформационная анизотропия. | 5 |
| 1.3.8 | Предел прочности. | 5 |
| 1.4 | Выводы из анализа диаграмм растяжения. | 6 |
| 2 | Основные положения теории напряжений. | 6 |
| 2.1 | Тензор напряжений. | 6 |
| 2.2 | Инварианты тензора напряжений. | 6 |
| 2.3 | Направляющий тензор напряжений. | 7 |
| 2.4 | Скалярные и векторные характеристики напряженного состояния. | 7 |
| 2.5 | Понятие о простом и сложном нагружении. | 7 |
| 3 | Элементы теории деформаций. | 8 |
| 3.1 | Инварианты тензора деформаций. | 8 |
| 3.2 | Выражение деформаций через перемещения. | 8 |
| 3.3 | Случай малых деформаций. Дилатация. | 8 |
| 3.4 | Девиатор деформаций. Модуль девиатора деформаций и направляющий вектор деформаций. | 8 |
| 3.5 | Скалярные и векторные характеристики деформации. | 9 |
| 3.6 | Интенсивность деформаций. | 9 |
| 3.7 | Интенсивность деформаций для пластически несжимаемого материала. . | 9 |
| 3.8 | Активное нагружение и разгрузка. | 10 |
| 4 | Теория малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина. | 10 |
| 4.1 | Основные предположения и гипотезы ТМУПД. | 10 |
| 4.1.1 | I. Пластическая несжимаемость. | 10 |
| 4.1.2 | II. Гипотеза единой кривой. | 10 |
| 4.1.3 | III. Направляющие тензоры напряжений и деформаций. | 11 |
| 4.2 | Функция пластичности А.А. Ильюшина. | 11 |
| 4.3 | Неравенство для функции пластичности. | 11 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5 | Постановка задачи ТМУПД. | 12 |
| 5.1 | Постановка задачи. | 12 |
| 5.1.1 | Уравнения равновесия. | 12 |
| 5.1.2 | Определяющие соотношения при активном и пассивном нагружении. | 12 |
| 5.1.3 | Соотношения Коши и граничные условия. | 12 |
| 5.1.4 | Другая запись определяющих соотношений. | 13 |
| 5.2 | Метод упругих решений А.А. Ильюшина. | 13 |
| 5.2.1 | Логистика метода упругих решений. | 13 |
| 5.3 | Метод переменных параметров упругости И.А. Биргера. | 14 |
| 5.3.1 | Логистика метода переменных параметров упругости. | 14 |

Введение.

Теория пластичности это очень обширный раздел общей механики деформируемых твердых тел, учитывающий нелинейное поведение материалов при нагружении. Уравнения движения при этом остаются прежними. Меняются только определяющие соотношения, то есть связи между напряжениями и деформациями. В зависимости от интенсивности нагрузок тело находится в различных состояниях, каждому из которых соответствуют свои определяющие соотношения. Под упругим состоянием понимается такое состояние тела, когда после снятия нагрузок тело восстанавливает свою прежнюю форму. В этом случае зависимость $\sigma \sim \varepsilon$ может быть как линейной (линейная упругость), так и нелинейной. Примером является резина.

Если после снятия нагрузки тело не восстанавливает свои геометрические размеры, то в этом случае тело находилось в пластическом состоянии, а остаточная деформация называется пластической деформацией. Пластические деформации существенно зависят от того каким образом происходило нагружение тела.

Ещё одна ситуация, когда после нагружения и фиксации нагрузок напряжения и деформации меняются со временем. Такое состояние называется вязкоупругим. Характер вязкоупругого состояния зависит от температуры тела. При высокой температуре упругие тела становятся вязкоупругими, при этом вязкоупругость может быть как линейной, так и нелинейной.

1 Диаграмма растяжения. Условная и истинная диаграммы напряжений.

Информацию о том какое состояние тела в различные моменты нагружения мы получаем экспериментов на растяжение или сжатие образца из материала тела. Как правило это призматический образец круглого или же прямоугольного сечения. В образце выделяется рабочая зона рабочей зона длиной не менее пяти характерного поперечного размера. Концы стержня специально готовят по захваты испытательной машины.

1.1 Диаграмма растяжения.

Рабочая зона размечается метками, позволяющими оценивать изменение длины между метками и степень её неравномерности по длине образца. На рисунке 1 показана рабочая часть образца (без разметки) в различные моменты испытания.

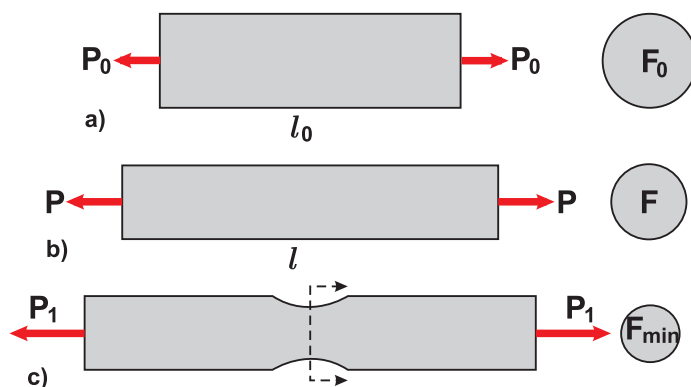


Рис. 1: Образец в различные моменты испытаний

Образец начальной длины l_0 нагружается небольшой начальной нагрузкой P_0 и измеряется величина абсолютного удлинения $\Delta l = l - l_0$. Далее нагрузка медленно увеличивается и снова измеряется величина удлинения, и так далее. В результате измерений получается таблица зависимости P от Δl , которую, в некотором масштабе, можно изобразить в виде графика $P = f(\Delta l)$. Именно этот график и называется диаграммой растяжения.

1.2 Условная и истинная диаграммы напряжений.

Однако диаграмма растяжения связана с образцом определенной длины l_0 и определенного начального поперечного сечения F_0 . Чтобы избежать этого недостатка вместо диаграммы растяжения строят так называемую условную диаграмму напряжений

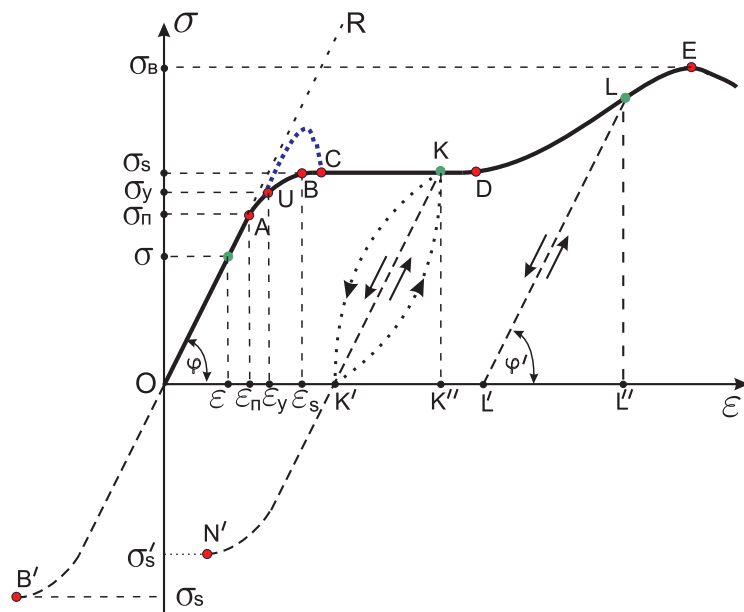


Рис. 2: Условная диаграмма напряжений

$$\boxed{\sigma = f(\epsilon)}, \quad \sigma \equiv \frac{P}{F_0}, \quad \epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1.1)$$

Диаграмма напряжений, изображенная на рисунке 2, является условной не только из-за определения условного напряжения, но и из-за того, что она не соответствует ни

одному из материалов. На этой диаграмме обозначены типичные ситуации, которые могут быть у реальных материалов. Однако разнообразие материалов столь велико, что могут быть и такие, которые не влезают в обозначенные рамки. Примером может служить чугун, у которого зависимость напряжения от деформации при растяжении практически с нуля является нелинейной [1, стр. 51], при этом деформация до разрушения составляет не более 0.5%. При сжатии деформации также малы, но предельное разрушающее напряжение намного больше предельного напряжения при растяжении.

В условной диаграмме условное напряжение определяется как сила отнесённая к первоначальной площади поперечного сечения.

В истинной диаграмме истинное напряжение равно отношению действующей силы к площади поперечного сечения в наиболее суженном месте (шейке, рисунок 1с).

Истинная диаграмма представляет связь между напряжениями и деформациями вплоть до разрыва. На начальных этапах условная и истинная диаграммы мало отличаются. В условной диаграмме, после образования шейки, силу уменьшают, следовательно на диаграмме после максимальной точки **Е** идёт падающий участок (рис. 2). В истинной диаграмме падающего участка нет, то есть, растягивающее напряжение в шейке растёт вплоть до разрыва.

1.3 Описание диаграммы напряжений.

1.3.1 Участок линейной и нелинейной упругости. Предел упругости. У большинства материалов вначале нагружения зависимость напряжения от деформации является линейной вплоть до точки **А**. Таким образом, на диаграмме $\operatorname{tg} \varphi = \sigma/\varepsilon = E = \operatorname{const}$. — модуль Юнга. **Если от точки А начать разгрузку, то она пойдет по прямой ОА** до нуля. Участок **ОА** называется участком линейной упругости. **Напряжение $\sigma_{\text{п}}$ называется пределом пропорциональности.**

Далее на диаграмме выделяется небольшой нелинейный участок **АУ**, где связь напряжений с деформациями нелинейна (**участок нелинейной упругости**), но разгрузка, тем не менее, идёт по кривой **УАО** до нуля, без остаточной деформации.

1.3.2 Площадка текучести. Предел текучести. Зуб текучести. Сразу после точки **У** и до конца начинается **участок пластичности, который характеризуется тем, что после разгрузки (уменьшение напряжений до нуля) в образце остаётся деформация — пластическая деформация.**

На участке пластичности имеются свои характерные зоны. У пластичных материалов, после точки **В**, идет площадка текучести **ВД**. **Состояние текучести характеризуется тем, что при постоянном напряжении растёт деформация. Напряжение σ_s , при котором начинается течение называется пределом текучести.**

На диаграмме площадка текучести изображена достаточно протяженной. На самом деле, у некоторых материалов, площадка текучести либо очень мала, либо она вовсе отсутствует. В этом случае за предел текучести условно принимается $\sigma_s = \sigma_{0.2}$, где $\sigma_s = \sigma_{0.2}$ — напряжение, при разгрузке от которого остаточная деформация равна $\varepsilon_p = 0.2\% = 0.002$.

На диаграмме (рис. 2) после предела текучести синим пунктиром изображен, так

называемый "зуб текучести". Он характеризуется тем, что при достижении предела текучести возможен некоторый рост напряжения, а затем резкое падение до предела текучести. В книге [2, стр. 31] это явление объясняется структурной перестройкой в материале.

1.3.3 Аддитивность упругой и пластической деформации. Если на участке диаграммы $UBCD$, например, от точки K на площадке текучести начать разгрузку, то она пойдет практически по прямой KK' параллельной OA . Отрезок $K'K''$ представляет собой упругую деформацию ϵ_y , которая полностью снимается при разгрузке. Остаётся пластическая деформация, представленная отрезком $OK' = \epsilon_p$. Таким образом, **полная деформация OK'' равна сумме упругой и пластической деформации, то есть**

$$\epsilon = \epsilon_y + \epsilon_p \quad (1.2)$$

1.3.4 Эффект Баушингера. Если из точки U разгрузить образец до нуля, а потом сжимать его, то кривая сжатия OB' в точности повторит кривую растяжения OB . То есть, **предел текучести на сжатие будет равен пределу текучести при растяжении**. Если же из точки K' (то есть после полной разгрузки) начать сжимать образец до точки N' начала текучести при сжатии, то новый предел текучести на сжатие будет меньше предела текучести на растяжение $\sigma'_s < \sigma_s$. В этом состоит **эффект Баушингера**

1.3.5 Разгрузка и повторное нагружение. Петля гистерезиса. Повторное нагружение из точки K' снова приводит нас в точку K . При этом, **новый предел упругости становится больше первоначального!**

Реально процесс разгрузки и повторная нагрузка идёт по нелинейному закону. На рисунке 2 траектория реальной разгрузки и повторной нагрузки изображена изображена точками. **Петля, образованная этими двумя кривыми называется петлёй Гистерезиса.**

1.3.6 Эффект упрочнения материала. Если продолжить нагружение, то выйдем на участок DE диаграммы напряжений. Этот участок называется участком упрочнения. При разгрузке из какой либо точки L участка DE и повторной нагрузке мы снова приходим в точку L . Это указывает на то, что **предел текучести материала при его предварительном деформировании за исходным пределом упругости приводит к повышению рабочего предела упругости и, соответственно, предела текучести при повторном нагружении. В этом заключается эффект упрочнения.**

1.3.7 Деформационная анизотропия. Ещё одно интересное свойство можно извлечь из анализа диаграммы напряжений. Для этого нужно рассмотреть процесс разгрузки из некоторой точки L участка упрочнения. Разгрузка идёт приблизительно по линии LL' параллельной линии OA .

Если угол $\varphi \neq \varphi'$, то имеет место деформационная анизотропия.

1.3.8 Предел прочности. Ордината σ_B максимальной точки B на диаграмме напряжения называется пределом прочности, или иначе пределом временного сопротивления (смысл этого второго определения предела прочности не ясен). **Предел прочности при растяжении равен максимальной растягивающей силе поделённой**

на исходную площадь поперечного сечения образца. Подробнее об этом [3, стр. 130]

1.4 Выводы из анализа диаграмм растяжения.

При малых деформациях порядка 0.3 – 0.5%, диаграмма линейная и связь между напряжением и деформацией также линейная. При дальнейшем деформировании возникают пластические деформации, которые при разгрузке остаются в теле. Эти деформации существенно больше упругих и составляют 10 – 20%. Связь между напряжением и деформацией существенно нелинейная.

2 Основные положения теории напряжений.

2.1 Тензор напряжений.

Сложное напряженное состояние в каждой точке тела описывается тензором напряжений σ , который в криволинейных координатах в каждом из четырёх диадных базисов представляется своими компонентами

$$\sigma = \sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sigma_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = \sigma_{i\cdot}^{\cdot j} \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j = \sigma_{\cdot j}^{\cdot i} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$$

Базис с нижними индексами $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ называется ковариантным диадным базисом, а базис с верхними индексами $\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$ — контравариантным диадным базисом. Соответственно, σ^{ij} и σ_{ij} называются контравариантными и ковариантными компонентами тензора напряжений. Базисы $\vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$ и $\vec{e}^i \otimes \vec{e}_j$ называются смешанными диадными базисами [4], а $\sigma_{i\cdot}^{\cdot j}$ и $\sigma_{\cdot j}^{\cdot i}$ — смешанными компонентами тензора напряжений.

В декартовых координатах разница между ковариантными и контравариантными компонентами исчезает.

2.2 Инварианты тензора напряжений.

Инвариантами называются комбинации из компонент тензора напряжений, которые не изменяются при преобразовании координат. **Из теоремы Гамильтона-Кели следует, что всякий симметричный тензор имеет только три независимых инварианта** [4, стр.]

$$J_1 = \sigma_i^i, \quad J_2 = \sigma_{i\cdot}^{\cdot j} \sigma_{\cdot j}^{\cdot i}, \quad J_3 = \sigma_{\cdot k}^{\cdot i} \sigma_{\cdot j}^{\cdot k} \sigma_{\cdot i}^{\cdot j} \quad (2.1)$$

В прямоугольных декартовых координатах все индексы опускаются вниз

$$J_1 = \sigma_{ii}, \quad J_2 = \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad J_3 = \sigma_{ik} \sigma_{kj} \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

Вместо инвариантов J_1, J_2, J_3 можно ввести другие инварианты, имеющие физический смысл

$$\sigma = \frac{1}{3} J_1 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad \text{— среднее гидростатическое напряжение,} \quad (2.3)$$

$$s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})} = \sqrt{J_2 + \frac{1}{3} J_1^2} \quad \text{— модуль девиатора напряжений,} \quad (2.4)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad \text{— интенсивность напряжений} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}, \quad (2.5)$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_u \quad \text{— интенсивность касательных напряжений} \quad (2.6)$$

Понятие об интенсивности напряжений было введено А.А. Ильюшиным [5, стр. 30]. Коэффициент $3/2$ в выражении (2.5) подобран так, чтобы при простом растяжении интенсивность напряжений совпадала с растягивающим напряжением, например

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (ij \neq 11) \quad \Rightarrow \quad \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_{11}^2} = \sigma_{11}$$

Коэффициент $1/2$ в выражении (2.6) для интенсивности касательных напряжений выбран так, чтобы при простом сдвиге интенсивность сдвига равнялась величине сдвигового напряжения. В самом деле: пусть все $\sigma_{ij} = 0$, кроме $\sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0$, тогда

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{6\sigma_{12}^2} = \sqrt{3}\sigma_{12} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_u = \sigma_{12}$$

2.3 Направляющий тензор напряжений.

Направляющий тензор — это безразмерный тензор \bar{s}_{ij} , компоненты которого определяются по формуле:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{s} \quad (2.7)$$

Очевидно, что компоненты направляющего тензора удовлетворяют уравнению:

$$\bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{s} \frac{s_{ij}}{s} = \frac{(\sqrt{s_{ij} s_{ij}})^2}{s^2} = \frac{s^2}{s^2} = 1$$

Отсюда следует, что **направляющий тензор имеет 4 независимые компоненты.**

2.4 Скалярные и векторные характеристики напряженного состояния.

Скаляры s и σ называются скалярными характеристиками напряженного состояния, а \bar{s}_{ij} — векторными. Зная эти характеристики можно найти тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = s \bar{s}_{ij} + \sigma \delta_{ij} \quad (2.8)$$

Таким образом, 6 компонент тензора напряжений в каждой точке тела выражаются через 2 скалярные величины s и σ , имеющие размерность напряжений, и 4 безразмерные векторные величины.

2.5 Понятие о простом и сложном нагружении.

Понятие о простом и сложном нагружении ввел А.А. Ильюшин. **Нагружение в точке тела называется простым, если все компоненты тензора напряжений пропорциональны одному скалярному параметру λ .** В этом случае меняются пропорционально λ только скалярные характеристики напряженного состояния, а векторные остаются постоянными.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \lambda = (s^0 \lambda) \bar{s}_{ij}^0 + (\sigma^0 \lambda) \delta_{ij} \quad (2.9)$$

3 Элементы теории деформаций.

Деформированное состояние тела в каждой точке характеризуется симметричным тензором деформаций, который так же как и тензор напряжений разлагается в криволинейной системе координат по одному из диадных базисов

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \varepsilon_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = \varepsilon_i^{\cdot j} \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j = \varepsilon_{\cdot j}^i \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j$$

3.1 Инварианты тензора деформаций.

Тензор деформаций, также как и тензор напряжений, имеет три независимых инварианта

$$I_1 = \varepsilon_i^i, \quad I_2 = \varepsilon_{\cdot j}^i \varepsilon_{\cdot i}^j, \quad I_3 = \varepsilon_{\cdot k}^i \varepsilon_{\cdot j}^k \varepsilon_{\cdot i}^j \quad (3.1)$$

3.2 Выражение деформаций через перемещения.

В лагранжевом подходе компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений u_i по формулам Грина

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u^k \nabla_j u_k), \quad (3.2)$$

где ∇_i — символ ковариантной производной. В прямоугольных декартовых координатах разница между верхними и нижними индексами исчезает и ковариантная производная становится частной производной $\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i}$. В этом случае формулы Грина принимают вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (3.3)$$

3.3 Случай малых деформаций. Дилатация.

При малых деформациях, то есть когда $|u_{i,j}| \ll 1$ нелинейные члены в формуле (3.3) можно отбросить и формулы Грина переходят в формулы Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.4)$$

Первый инвариант тензора деформаций при малых деформациях обозначается через ε . Он имеет смысл относительного изменения объёма и называется дилатацией

$$\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \operatorname{div} \vec{u} \approx \frac{dV - dV_0}{dV_0} \quad (3.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать только малые деформации

3.4 Девиатор деформаций. Модуль девиатора деформаций и направляющий вектор деформаций.

Определим девиатор деформаций следующим образом:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (3.6)$$

Девиатор деформаций имеет 5 независимых компонент, поскольку

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii} - \frac{1}{3} \varepsilon_{jj} \delta_{ii} = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj} = 0 \quad (3.7)$$

Модуль тензора деформаций определим также как и в случае тензора напряжений

$$e = \sqrt{e_{ij}e_{ij}} = \sqrt{(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij})(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)} \quad (3.8)$$

Направляющий вектор деформаций

$$\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{e} \quad (3.9)$$

Направляющий вектор деформаций имеет всего лишь 4 независимые компоненты, вследствие двух равенств

$$\bar{e}_{ii} = 0, \quad \bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} = 1 \quad (3.10)$$

3.5 Скалярные и векторные характеристики деформации.

Две функции ε и e называются скалярными характеристиками деформации, а направляющий тензор \bar{e}_{ij} с четырьмя независимыми компонентами называется вектором деформации. Через эти шесть величин можно выразить все шесть компонент тензора деформаций по формуле

$$\varepsilon_{ij} = e\bar{e}_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (3.11)$$

3.6 Интенсивность деформаций.

В выражении (2.5) для интенсивности напряжений σ_u коэффициент $3/2$ выбран так, чтобы при простом растяжении интенсивность напряжений равнялась растягивающему напряжению. Попробуем ввести похожим способом интенсивность деформаций, то есть определим ε_u как величину пропорциональную модулю девиатора деформации

$$\varepsilon_u = Ce = \sqrt{e_{ij}e_{ij}} =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)} \quad (3.12)$$

Коэффициент пропорциональности C так, чтобы при одноосном растяжении интенсивность деформаций равнялась продольной деформации ε_{11} . В этом случае, кроме продольной деформации, имеется поперечная деформация

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$$

Отсюда и из (3.12) получаем

$$\varepsilon_u = \frac{C}{\sqrt{3}}\sqrt{2(1+\nu)^2\varepsilon_{11}^2} = C\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\nu)\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} \Rightarrow \boxed{C = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{1+\nu}} \quad (3.13)$$

3.7 Интенсивность деформаций для пластически несжимаемого материала.

В этом случае коэффициент Пуассона $\nu = 1/2$, тогда $C = \sqrt{2/3}$. Следовательно, для пластически несжимаемого материала

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \sqrt{\frac{2}{3}} e = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{e_{ij}e_{ij}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

При простом растяжении

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_u = \varepsilon_{11}}$$

3.8 Активное нагружение и разгрузка.

Процесс деформации в точке тела считается активным, если σ_u в этой точке в данный момент нагружения имеет значение превышающее все его предшествующие значения. Если σ_u меньше хотя бы одного из предшествующих значений, то такой процесс является пассивным и называется разгрузкой.

$$s_{ij}d\varepsilon_{ij}^p > 0 \text{ — НАГРУЗКА,} \quad s_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \leq 0 \text{ — РАЗГРУЗКА} \quad (3.15)$$

4 Теория малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина.

Основное отличие указанной теории от теории упругости заключается в определяющих соотношениях, связывающих напряжения и деформации. При этом делаются следующие предположения:

4.1 Основные предположения и гипотезы ТМУПД.

Теория малых упруго-пластических деформаций основана на трёх основных предположениях

4.1.1 I. Пластическая несжимаемость.

Пластическая несжимаемость означает, что при переходе в пластическое состояние материал становится несжимаемым

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \quad (4.1)$$

4.1.2 II. Гипотеза единой кривой.

При любом НДС в активном процессе интенсивность напряжений является взаимнооднозначной функцией интенсивности деформаций

$$\sigma_u = f(\varepsilon_u), \quad \varepsilon_u = f^{-1}(\sigma_u) \quad (4.2)$$

В области упругости $f(\varepsilon_u)$ является линейной однородной функцией, то есть

$$\sigma_u = 3\mu\varepsilon_u, \quad (4.3)$$

где μ — упругий модуль сдвига.

При чистом сдвиге в упругой области $\sigma_{12} \neq 0$ и $\varepsilon_{12} \neq 0$. Следовательно $\sigma_u = \sqrt{3}\sigma_{12}$ и $\varepsilon_u = 2\varepsilon_{12}/\sqrt{3}$. Тогда из формулы (4.3) получается закон Гука при сдвиге $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$.

При простом растяжении в упругой области $\sigma_u = \sigma_{11}$ и $\varepsilon_u = 2(1 + \nu)\varepsilon_{11}/3$. Из формулы (4.3) получаем:

$$\sigma_{11} = 3\mu\varepsilon_u = 3\mu \frac{2(1 + \nu)}{3}\varepsilon_{11} = 2\mu(1 + \nu)\varepsilon_{11} = E\varepsilon_{11},$$

где $E = 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга, выраженный через модуль сдвига и коэффициент Пуассона в упругой области. Таким образом, опять из формулы (4.3) получен закон Гука при простом растяжении.

4.1.3 III. Направляющие тензоры напряжений и деформаций.

$$\bar{s}_{ij} = \bar{e}_{ij} \Rightarrow \frac{s_{ij}}{s} = \frac{e_{ij}}{e} \Rightarrow s_{ij} = \frac{s}{e} e_{ij} \quad (4.4)$$

Учитывая, что

$$s = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_u, \quad e = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_u,$$

получаем следующую связь между девиаторами:

$$\boxed{s_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} e_{ij} \Rightarrow s_{ij} = \frac{2f(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u} e_{ij}} \quad (4.5)$$

В этой формуле зависимость $f(\varepsilon_u)$ — экспериментальная (либо аналитическая) кривая представляющая собой условную диаграмму напряжений при простом растяжении образца.

4.2 Функция пластичности А.А. Ильюшина.

Формулу (4.5) удобно переписать в виде:

$$\boxed{s_{ij} = 2\mu[1 - \omega(\varepsilon_u)]e_{ij}}, \quad (4.6)$$

где $\omega(\varepsilon_u)$ — функция пластичности А.А. Ильюшина

$$\boxed{\omega(\varepsilon_u) = 1 - \frac{f(\varepsilon_u)}{3\mu\varepsilon_u} = 1 - \frac{\sigma_u}{3\mu\varepsilon_u}} \quad (4.7)$$

4.3 Неравенство для функции пластичности.

На упругом участке функция пластичности тождественно равна нулю

В самом деле, согласно (4.3), на упругом участке $\sigma_u = 3\mu\varepsilon_u$. Тогда

$$\omega = 1 - \frac{\sigma_u}{3\mu\varepsilon_u} = 1 - \frac{3\mu\varepsilon_u}{3\mu\varepsilon_u} = 1 - 1 = 0$$

На нелинейном участке функция пластичности меньше единицы, то есть

$$\boxed{0 \leq \omega(\varepsilon_u) \leq 1} \quad (4.8)$$

Правая часть неравенства (4.8) вытекает из гипотезы единой кривой (4.2), согласно которой $\sigma_u = f(\varepsilon_u)$ и есть диаграмма напряжений (рис. 2) при простом растяжении. Как видно из рисунка формулы (4.3) вся кривая $\sigma_u(\varepsilon_u)$ после точки **A** — предела пропорциональности, лежит ниже прямой **OR**. Таким образом, $\sigma_u(\varepsilon_u) < 3\mu\varepsilon_u$, следовательно, $\sigma_u/(3\mu\varepsilon_u) < 1$. Отсюда и из формулы (4.7), как раз и следует правая часть неравенства (4.8).

5 Постановка задачи ТМУПД.

5.1 Постановка задачи.

5.1.1 Уравнения равновесия. Уравнения равновесия являются одинаковыми, как в теории упругости, теории вязкоупругости, так и в ТМУПД

$$\sigma_{ij,j} + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.1)$$

5.1.2 Определяющие соотношения при активном и пассивном нагружении.

Определяющие соотношения при активном нагружении записываются в виде двух соотношений. Первое из них — связь девиатора напряжений с девиатором деформаций. Второе соотношений выражает упругий закон связи гидростатического напряжения с относительным изменением объёма (дилатацией). Это второе соотношение одинаково при нагрузке и разгрузке. При активном нагружении, согласно (3.15), $s_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}de_{ij} > 0$

$$s_{ij} = 2\mu(1 - \omega(\varepsilon_u))e_{ij}, \quad \sigma = K\varepsilon \quad (5.2)$$

При разгрузке, то есть при $s_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}de_{ij} \leq 0$, начиная с достигнутых значений s_{ij}^* и e_{ij}^* связь между девиаторами станет линейной [6, стр. 36]

$$s_{ij} - s_{ij}^* = 2\mu(e_{ij} - e_{ij}^*) \quad (5.3)$$

5.1.3 Соотношения Коши и граничные условия. Соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), & \varepsilon &= u_{k,k}, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{3}u_{k,k}\delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Граничные условия смешанного типа

$$u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_p} = (s_{ij} + \sigma\delta_{ij})n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0 \quad (5.5)$$

5.1.4 Другая запись определяющих соотношений. Определяющие соотношения в виде двух независимых выражений (5.2) не всегда удобны. Их можно представить единой формулой

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= s_{ij} + \sigma\delta_{ij} = 2\mu(1 - \omega) \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \right) + K\varepsilon\delta_{ij} = \\
&= \left[K - \frac{2}{3}\mu(1 - \omega) \right] \varepsilon\delta_{ij} + 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\omega \right) \varepsilon\delta_{ij} + 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_{ij} = \\
&= \lambda\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - 2\mu\omega \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij} \right) = \left(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\Delta_{ijkl} \right) \varepsilon_{kl} - 2\mu\omega I_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \\
&= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - 2\mu\omega I_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - 2\mu\omega e_{ij},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

где $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\Delta_{ijkl}$ — тензор модулей упругости однородного изотропного материала, $I_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ — тензор четвёртого ранга, выделяющий тензор-девиатор из любого симметричного тензора второго ранга.

5.2 Метод упругих решений А.А. Ильюшина.

Формула (5.6) используется в методе упругих решений А.А. Ильюшина для решения задач ТМУПД. Это рекуррентный метод последовательных приближений. Суть метода заключается в том, что на каждом этапе решается задача теории упругости с одним и тем же тензором модулей упругости C_{ijkl} . Входные данные $X_i^{(n+1)}$, $u_i^{0(n+1)}$ и $p_i^{0(n+1)}$ на каждом следующем этапе вычисляются через решение упругой задачи на предыдущем этапе. А.А. Ильюшин указал условия сходимости метода упругих решений

$$0 < \omega \leq \omega + \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} \varepsilon_u < 1 \tag{5.7}$$

5.2.1 Логистика метода упругих решений. Подставим определяющие соотношения (5.6) в уравнения равновесия (5.1) и во второе граничное условие (5.5). Запишем то, что получилось в следующем виде:

$$\left(C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \right)_{,j} + X_i - 2\mu \left[\omega(\varepsilon_u) e_{ij} \right]_{,j} = 0, \quad C_{ijkl}\varepsilon_{kl} n_j \Big|_{\Sigma_p} = p_i^0 + 2\mu\omega(\varepsilon_u) e_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_p} \tag{5.8}$$

Далее запишем эти уравнения следующим образом:

$$\left(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)} \right)_{,j} + X_i^{(n)} = 0, \quad C_{ijkl}\varepsilon_{kl} n_j \Big|_{\Sigma_p} = p_i^{0(n)}, \tag{5.9}$$

где

$$X_i^{(n)}(x) = \begin{cases} X_i(x) & \text{if } n = 0 \\ X_i(x) - 2\mu \left[\omega(\varepsilon_u^{(n-1)}) e_{ij}^{(n-1)} \right]_{,j} & \text{if } n > 0 \end{cases}, \tag{5.10}$$

$$p_i^{0(n)} = \begin{cases} p_i^0 & \text{if } n = 0 \\ p_i^0 + 2\mu\omega(\varepsilon_u^{(n-1)}) e_{ij}^{(n-1)} n_j \Big|_{\Sigma_p} & \text{if } n > 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

При каждом n постановка задачи имеет вид классической задачи теории упругости

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} + X_i^{(n)}(x) &= 0, & \text{— уравнения равновесия,} \\
\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{(n)}, & \text{— обобщённый закон Гука,} \\
\varepsilon_{ij} &= \Delta_{ijkl} u_{k,l}^{(n)}, & \text{— соотношения Коши,} \\
u_i^{(n)} \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^{0(n)}, \quad \sigma_{ij}^{(n)} n_j \Big|_{\Sigma_p} = p_i^{0(n)}, & \text{— смешанные граничные условия.}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь $u_i^{0(n)} = u_i^0$ при всех $n \geq 0$, а $X_i^{(n)}(x)$ и $p_i^{0(n)}$ вычисляются по предыдущему приближению по формулам (5.10) и (5.11).

5.3 Метод переменных параметров упругости И.А. Биргера.

Суть этого метода состоит в том, что на каждом этапе вычислений нужно решать задачу теории упругости для неоднородного упругого тела [7].

5.3.1 Логистика метода переменных параметров упругости. Запишем формулу (5.6) следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \left[\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\omega \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu(1 - \omega)\Delta_{ijkl} \right] \varepsilon_{kl} \quad (5.13)$$

Теперь запишем рекуррентное соотношение

$$\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{kl}^{(n)} = \left[\lambda^{(n)} \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu^{(n)} \Delta_{ijkl} \right] \varepsilon_{kl}^{(n)} \quad (5.14)$$

где

$$\lambda^{(n)} = \begin{cases} \lambda & \text{if } n = 0 \\ \lambda + \frac{2}{3}\mu\omega(\varepsilon_u^{(n-1)}) & \text{if } n > 0 \end{cases}, \quad \mu^{(n)} = \begin{cases} \mu & \text{if } n = 0 \\ \mu[1 - \omega(\varepsilon_u^{(n-1)})] & \text{if } n > 0 \end{cases}, \quad (5.15)$$

Далее при каждом n решаем классическую задачу теории упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + X_i(x) &= 0, & \text{— уравнения равновесия,} \\ \sigma_{ij}^{(n)} &= C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{kl}^{(n)}, & \text{— обобщённый закон Гука,} \\ \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \Delta_{ijkl} u_{k,l}^{(n)}, & \text{— соотношения Коши,} \\ u_i^{(n)}|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad \sigma_{ij}^{(n)} n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0, & \text{— смешанные граничные условия.} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Как видно, на каждом этапе решается задача теории упругости с неизменными входными данными, но с изменяющимися модулями упругости. Началом рекурсии является задача для однородного изотропного упругого тела. На следующем шаге модули упругости изменяются и становятся зависящими от координат. Задача для неоднородного упругого тела существенно усложняется. Такие задачи являются предметом изучения раздела МДТТ под названием "Механика композитов".

Список литературы

- [1] Беляев Н.М. *Сопротивление материалов*. Наука, Москва, 1976.
- [2] Под ред. Блюменауэра, editor. *Испытание материалов. Справочник*. Металлургия, Москва, 1979.
- [3] Работнов Ю.Н. *Сопротивление материалов*. ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1962.
- [4] Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу. 2-е изд.* МГУ, Москва, 1979.
- [5] Ильюшин А.А. *Пластичность*. Гостехиздат, Москва, 1948.
- [6] Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. МГУ, Москва, 1995.
- [7] Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач пластичности. *ПММ*, 15(6):??, 1951.