ЛЕКЦИЯ 5
ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МДТТ
Для студентов 3-го курсов отделения механики механико-математического факультета МГУ
Профессор В.И. Горбачев (17 марта 2020 г.)

1 Динамическая задача механики деформируемого твёрдого тела.

Пусть нагрузки, действующие на тело меняются во времени. В этом случае перемещения, деформации, напряжения также зависят от времени. Задача отыскания этих величин в каждой точке тела в каждый момент времени и является динамической задачей МДТТ.

1.1 Постановка нестационарной, динамической задачи теории упругости.

Система уравнений движения отличается от уравнений равновесия наличием инерционного члена и начальных условий. Запишем эту систему уравнений следующим образом:
уравнения:

$$\sigma_{ij,j} + X_i(x,t) = \varrho(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\,,\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\,\varepsilon_{kl}\,,\ \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn}\,u_{m,n}\,;\quad (x\in V); \tag{1.1}$$

граничные условия:

$$\sigma_{ij}\,n_j|_{\Sigma_p} = p_i^0(y,t),\ y\in\Sigma_p\,;\quad u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0(y,t),\ y\in\Sigma_u\,;\quad (\Sigma_p\cup\Sigma_u = \Sigma)\,; \tag{1.2}$$

начальные условия:

$$u_i(x,0) = f_i(x),\quad \frac{\partial u_i(x,0)}{\partial t} = g_i(x) \tag{1.3}$$

Вместо 15 уравнений (1.1) можно записать систему из трёх уравнений относительно трёх перемещений

$$\left[C_{ijkl}(x)u_{k,l}\right]_{,j} + X_i(x,t) = \varrho(x)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1), или же уравнения (1.4), являются уравнениями движения линейной теории упругости неоднородного анизотропного тела.

1.1.1 Условия гиперболичности уравнений движения.

Система уравнений (1.4) будет гиперболической системой в точке x области V, если в этой точке определены коэффициенты $C_{ijkl}(x)$, $\varrho(x)$, и если

$$\varrho(x) > 0\,,\qquad C_{ijkl}(x)\gamma_{ij}\gamma_{kl} > 0\quad \text{для}\quad \forall\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \neq 0 \tag{1.5}$$

1.1.2 Типы граничных условий.

Граничные условия (1.2) представляют собой условия *смешанной краевой задачи* теории упругости. В том случае, когда на всей границе тела задаются только перемещения ($\Sigma_p \equiv \varnothing$) задача называется *первой краевой задачей.* Если же на всей границе заданы распределённые нагрузки ($\Sigma_u \equiv \varnothing$), тогда это *вторая краевая задача*[1]. Возможны и другие типы граничных условий. В любом случае в каждой точке поверхности тела должны быть заданы только три величины, которые комбинируются из компонент вектора перемещений $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и из компонент вектора напряжений на поверхности тела $\vec{S} = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j, \sigma_{3j}n_j)$, например следующим образом:

$$\left[a_{ik}(y)u_k + b_{ik}(y)\sigma_{kj}\,n_j\right]_{\Sigma} = q_i^0(y,t),\quad (y\in\Sigma)\,, \tag{1.6}$$

где коэффициенты $a_{ik}(y)$ и $b_{ik}(y)$ — функции, заданные на Σ.

[1]некоторые авторы, наоборот, называют первой краевой задаче случай задания на всей поверхности распределённых усилий, а второй краевой задачей — случай заданных перемещений поверхностных точек

1.1.3 Условия на поверхностях разрыва коэффициентов (контактные условия).

В композиционных материалах коэффициенты C_{ijkl} и ϱ могут быть разрывны на кусочно-гладкой поверхности Σ_r, разделяющей различные фазы композита. Для выделения единственного решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.4) в точках гладкости поверхности разрыва должны быть поставлены дополнительные условия. *Контактных условий должно быть ровно шесть и они составляются из значений вектора перемещений и компонент тензора напряжений по обеим сторонам поверхности разрыва.* Например:
идеальный (жесткий) контакт

$$[[u_i]]_{\Sigma_r} = 0, \qquad [[\sigma_{ij}]]n_j|_{\Sigma_r} = 0\,, \quad (\vec{n} \perp \Sigma_r\,,\ |\vec{n}| = 1)\,; \tag{1.7}$$

скользящий контакт

$$[[u_n]]_{\Sigma_r} \equiv [[u_i]]_{\Sigma_r} n_i = 0, \qquad [[\sigma_n]]_{\Sigma_r} \equiv [[\sigma_{ij}]]_{\Sigma_r} n_i n_j = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\sigma^{\pm}_{\tau^{(1)}} \equiv \sigma^{\pm}_{ij} n_j \tau^{(1)}_i = 0\,, \qquad \sigma^{\pm}_{\tau^{(2)}} \equiv \sigma^{\pm}_{ij} n_j \tau^{(2)}_i = 0 \tag{1.9}$$

При наличии трения на контактной поверхности перемещение точек по нормали и нормальное напряжение непрерывны, а касательные напряжения с обеих сторон поверхности разрыва пропорциональны нормальному напряжению [1]

$$\sigma^{\pm}_{\tau^{(1)}} \equiv \sigma^{\pm}_{ij} n_j \tau^{(1)}_i = k_1 \sigma^{\pm}_{ij} n_i n_j = k_1 \sigma_{(n)}\,, \qquad \sigma^{\pm}_{\tau^{(2)}} \equiv \sigma^{\pm}_{ij} n_j \tau^{(2)}_i = k_2 \sigma^{\pm}_{ij} n_i n_j = k_2 \sigma_{(n)} \tag{1.10}$$

В формулах (1.7)–(1.10): $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности разрыва, $\vec{\tau}^{(1)}$ и $\vec{\tau}^{(2)}$ — единичные касательные векторы к поверхности разрыва. Как правило, эти три вектора образуют ортонормированный репер. f^+ — значение функции f на поверхности разрыва со стороны направления нормали $\vec{n}$, f^- — значение функции f с противоположной стороны от направления нормали, $[[f]] \equiv f^+ - f^-$ — скачёк функции на поверхности разрыва.

1.1.4 Дополнительные граничные условия в сингулярных линиях и в сингулярных точках.

Сингулярные линии и сингулярные точки — это такие линии и точки, где граничные, или контактные условия являются неопределёнными. Эти линии и точки могут быть на поверхности тела, а также и внутри тела Σ, если она предполагается кусочно-гладкой, т.е. нормаль к поверхности тела существует всюду за исключением конечного числа кусочно-гладких рёбер (линий) границы и вершин границы (точек) [2]. К вершинам границы относятся также и точки излома рёбер. На рёбрах и в вершинах нормаль неопределена, поэтому в этих местах не определены граничные условия и они являются сингулярными линиями и точками. Граничные условия не определены также и на линиях разделяющих части поверхности тела, где заданы условия разных типов. Таким образом, линии раздела граничных условий также являются сингулярными линиями несмотря на то, что на поверхности в этих местах может существовать единственная нормаль. Внутренние сингулярные линии и точки располагаются на поверхностях контакта различных фаз композита.

Для обеспечения единственности решения поставленной задачи при заданных начальных и граничных условиях необходимы дополнительные условия на сингулярных линиях и точках.

1.2 Основные частные задачи общей динамической задачи.

Исходная задача в общем случае крайне сложна. В зависимости от формы области тела, типа граничных и начальных условий она подразделяется на более простые задачи.

1.2.1 Задача Коши.

Если среда бесконечна, то решение уравнений движения зависит только от объёмных нагрузок и от начальных условий, т.е. от перемещений и скоростей точек тела в начальный момент времени. Такая задача называется *задачей Коши*.

В задаче Коши объёмные нагрузки могут быть сосредоточенным источником

$$\vec{X}^{(k)}(x,t) = P(t)H(t)\delta(x-\xi)\delta_{kj}\vec{e}_j\,, \tag{1.11}$$

где $H(t)$ —функция Хевисайда, $\delta(x-\xi) = \delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\delta(x_3-\xi_3)$ — дельта-функция Дирака, ξ — точка приложения сосредоточенной силы $P(t)$. **Решение задачи Коши в случае сосредоточенного источника называется *фундаментальным решением*.**

1.2.2 Задача о свободных колебаниях тела.

Если в ограниченном теле объёмные и поверхностные нагрузки отсутствуют (граница свободна от нагрузок и закреплений), а движение точек тела происходит за счёт начальных возмущений, то такая задача называется задачей о свободных колебаниях тела.

Поведение тела при свободных колебаниях характеризует его *динамическую индивидуальность*, которая определяет поведение тела при всех других воздействиях [3, стр. 35]. Свободные колебания в теле возможны во-первых, потому, что оно имеет массу и может в движении накапливать кинетическую энергию, а во-вторых деформируемое твердое тело способно накапливать потенциальную энергию при отклонении его точек от положения равновесия. При свободных колебаниях, поочередно, один вид энергии переходит в другой. Эта ситуация похожа на колебания маятника, у которого в верхнем положении максимальная потенциальная энергия и минимальная кинетическая (нулевая), а в нижнем положении, наоборот, максимальна кинетическая энергия и минимальна потенциальная.

1.2.3 Задача об установившихся колебаниях тела (стационарная динамическая задача).

Пусть входные данные (граничные воздействия и объёмные нагрузки) являются периодическими функциями времени. Если они приложены давно (с момента времени $t=-\infty$), то перемещения, деформации и напряжения в теле через какое то время также станут периодическими функциями, т.е. установятся. **В задачах об установившихся колебаниях заранее предполагается некий вид периодической зависимости искомых функций от времени. Начальные условия в стационарных динамических задачах не рассматриваются.** Существенными являются только граничные условия.

Для примера рассмотрим случай, когда входные граничные данные нулевые, а объёмные нагрузки периодические функции времени, т.е.

$$u_i^0 \equiv 0\,, \quad p_i^0 \equiv 0\,, \quad X_k(x,t) = \overset{*}{X}_k(x)\cos\omega t + \overset{*}{Y}_k(x)\sin\omega t = Re\,\overset{*}{Z}_k(x)e^{i\omega t}\,, \tag{1.12}$$

где i — комплексная единица, Re обозначает действительную часть комплексной функции $Z_k(x) = X_k(x) + iY_k(x)$ координат точки тела. Перемещения ищем в виде таких же как и $X_k(x,t)$ периодических по времени функций времени, но с другой комплексной амплитудой

$$u_k(x,t) = \overset{*}{u}_k(x)e^{i\omega t} \tag{1.13}$$

Подстановка решения (1.13) в уравнения движения приводит к следующей краевой задаче для амплитуды периодических по времени перемещений

$$\left[C_{ijkl}\,\overset{*}{u}_{k,l}\right]_{,j} + \overset{*}{X}_i = -\varrho\omega^2\,\overset{*}{u}_i\,; \qquad \overset{*}{u}_i|_{\Sigma_u} = 0\,, \quad \overset{*}{\sigma}_{ij}\,n_j|_{\Sigma_p} = 0 \tag{1.14}$$

1.2.4 Задача о собственных колебаниях тела. Собственные частоты.

Если в уравнениях (1.14) положить $\overset{*}{X}_i \equiv 0$, то получим задачу о собственных колебаниях тела

$$\left[C_{ijkl}\,\overset{*}{u}_{k,l}\,\right]_{,j} = -\varrho\omega^2\,\overset{*}{u}_i\,; \qquad \overset{*}{u}_i\,|_{\Sigma_u} = 0\,, \quad \overset{*}{\sigma}_{ij}\,n_j|_{\Sigma_p} = 0 \tag{1.15}$$

Таким образом, задача о собственных колебаниях состоит в нахождении периодического решения динамической задачи при нулевых входных данных (объёмные силы и граничные условия)

Очевидным решением краевой задачи (1.15) является нулевое (тривиальное) решение $\overset{*}{u}_i \equiv 0$. Однако, при некоторых ω задача (1.15) может иметь нетривиальное решение. Такие частоты называются *собственными частотами*, а колебательные движения им соответствующие называются *собственными колебаниями.*

В математике задача подобная задаче (1.15) называется задачей о собственных функциях и собственных числах уравнений эллиптического типа.

1.2.5 Случай резонанса.

При периодических внешних воздействиях в деформируемом твердом теле может возникать явление резонанса. **Резонанс возникает тогда, когда частота внешнего воздействия близка или совпадает с одной из собственных частот. Выражается резонанс в том, что амплитуда колебаний частиц тела возрастает до такой степени, что может произойти его разрушение.**

1.2.6 Задача дифракции.

Рассматривается бесконечное упругое пространство, в котором распространяется возмущение, исходящее из точки A. Пусть на некотором расстоянии от точки A находится препятствие, в котором возмущения не могут распространяться рис.1. Возмущения доходят до препятствия и отражаются от него. Препятствие имеет область геометрической тени куда не проходят лучи, исходящие из точки A. Явление дифракции заключается в том, что возмущение частично отражается от препятствия и проникает в область тени.

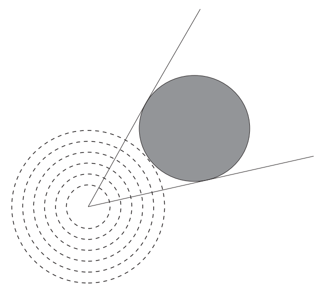

Рис. 1: Отражение и дифракция

Задача дифракции заключается в изучении взаимодействия препятствия с распространяющимся в среде возмущением. В результате, из решения задачи дифракции, в частности, вытекает возможность предсказания поведения отраженного возмущения и возмущения в области геометрической тени. Более подробные сведения о задаче дифракции, а также о её математической постановке приведены, например, в монографии [4]

2 Волны в твёрдом теле.

Одно из самых интересных и разнообразных явлений в природе это распространяющиеся в среде волны. При поверхностном взгляде на волны кажется, что частицы среды перемещаются вместе с волнами. Однако это не так, волна бежит, а частицы среды практически остаются на месте. В этом можно убедиться, если понаблюдать за кораблями или за чайками на воде — они качаются на волнах, практически не приближаясь к берегу и не удаляясь от него.

2.1 Общие понятия теории волн.

2.1.1 Определение волны.

Если в теле имеется возмущение какой либо величины в какой либо точке и это возмущение распространяется на другие точки, то *процесс распространения возмущения называется волной.*

2.1.2 Колебания.

При прохождении волны точки тела могут перемещаться либо в направлении волны, либо перпендикулярно ему, либо под некоторым углом к направлению движения волны.

Движение точек тела при распространении волны называется колебанием.

2.1.3 Период и частота волн. Дисперсия волн. Дисперсионное уравнение

Возмущения (волны) могут быть периодическими функциями по времени.

Под *периодом волны* понимается промежуток времени T между соседними, одинаковыми возмущениями. Величина обратная периоду, или число возмущений в единицу времени, называется *частотой волны* $\omega = 1/T$.

Случай, когда скорость распространения волны зависит от частоты называется *дисперсией волн*. Уравнение, связывающее скорость волны с частотой называется дисперсионным уравнением, или *дисперсионным соотношением*.

Таким образом, *когда говорят о дисперсии волн, то имеются в виду периодические волны.*

2.1.4 Продольная и поперечная волны.

Волны (возмущения) всегда распространяются в определенном направлении, а точки среды, где распространяются волны могут двигаться, в принципе, в любом направлении по отношению к направлению распространения волны. ***Если направление движения материальной точки совпадает с направлением распространения волны, то такая волна называется продольной волной. Если же направление движения точки перпендикулярно направлению распространения волны, то волна называется поперечной волной.*** Забегая вперёд, скажем, что в бесконечной изотропной упругой среде возможны только два типа волн — продольные и поперечные волны. В анизотропной среде может быть большее количество независимых типов волн.

2.1.5 Плоская волна. Сферическая волна

Если в движении находятся все точки какой либо плоскости, то говорят о плоской волне (все точки плоскости одинаково смещаются). Плоская волна может быть и продольной и поперечной. Под сферической волной понимается такая волна, при которой возмущение распространяется во все стороны по радиусам, исходящим из одной точки. Если точки равноотстоящие от центра возмущения имеют одинаковые радиальные перемещения, то сферическая волна называется продольной волной. Если же перемещения точек одинаковы и касательны к сфере с центром в центре возмущений, то такие сферические волны называются поперечными волнами. Разумеется, что сферические волны могут быть ни продольными, ни поперечными.

2.2 Волны в бесконечной изотропной упругой среде (задача Коши)

В бесконечной упругой среде причинами волнения могут быть начальные условия, а так же объёмные нагрузки, зависящие от времени. Уравнения движения однородной изотропной среды имеют вид:

$$(\lambda + \mu)\, grad\, div\, \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{X} = \varrho \ddot{\vec{u}}, \tag{2.1}$$

или в координатной форме

$$(\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + X_i = \varrho \ddot{u}_i \tag{2.2}$$

Будем считать, что объёмная нагрузка задана в конечной области, и что на бесконечности среда покоится, т.е. $\vec{u} \to 0$ и $\underset{\sim}{\sigma} \to 0$ при $\vec{x} \to \infty$. В этом случае можно воспользоваться теоремой Гельмгольца, по которой ***любое однозначное и непрерывное векторное поле, обращающееся в нуль на бесконечности, может быть представлено в виде суммы градиента скалярной функции φ и ротора векторной функции с нулевой дивиргенцией*** [5, стр. 131]

$$\vec{u} = grad\, \varphi + rot\, \vec{\psi}\,, \qquad div\, \vec{\psi} = 0\,, \tag{2.3}$$

или в покомпонентной записи

$$u_i = \varphi_{,i} + \epsilon_{ijk}\psi_{k,j}\,, \qquad \psi_{i,i} = 0 \tag{2.4}$$

Объёмную нагрузку также разложим на потенциальную и вихревую составляющие

$$\vec{X} = \varrho\, (grad\, \Phi + rot\, \vec{\Psi})\,, \qquad div\, \vec{\Psi} = 0\,, \tag{2.5}$$

Подставим разложение (2.5) в уравнение (2.1) и учтём, что $div\, rot\, \vec{u} = 0$ и $div\, grad\, \varphi = \Delta\varphi$ (Δ— оператор Лапласа), получим

$$grad[(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \varrho\ddot{\varphi} + \varrho\Phi] + rot[\mu\Delta\vec{\psi} - \varrho\ddot{\vec{\psi}} + \varrho\vec{\Psi}] = 0 \tag{2.6}$$

Отсюда получим уравнения для функций φ и $\vec{\psi}$, которые гораздо проще чем исходные уравнения движения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\,\ddot{\varphi} = -\frac{1}{c_1^2}\,\Phi\,, \qquad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \tag{2.7}$$

$$\Delta\vec{\psi} - \frac{1}{c_2^2}\,\ddot{\vec{\psi}} = -\frac{1}{c_2^2}\,\vec{\Psi}\,, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \tag{2.8}$$

2.2.1 Волновое уравнение. Оператор Даламбера. Волновые потенциалы.

Уравнения (2.7) и (2.8) называются волновыми уравнениями. Они описывают распространение начального возмущения со скоростями c_1 и c_2. Причём ***$\mathbf{c_1}$ — скорость распространения продольных волн, а $\mathbf{c_2 < c_1}$ — скорость распространения поперечных волн***. К уравнениям (2.7) и (2.8) нужно добавить ещё начальные условия и условия на бесконечности.

Дифференциальные операторы

$$D_k \equiv \Delta - \frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,, \qquad (k = 1,\ 2) \tag{2.9}$$

называются операторами Даламбера. Функции $\varphi(x,t)$ и $\vec{\psi}(x,t)$ называются скалярным и векторным потенциалами, соответственно.

Для оправдания названия продольные и поперечные волны рассмотрим случай когда волна распространяется в одном направлении, например в направлении оси x_1. Причем $\varphi = \varphi(x_1)$ и $\vec{\psi} = \vec{\psi}(x_1)$ — плоская волна. В этом случае из (2.4) получаем

$$u_1(x_1) = \varphi_{,1} + \epsilon_{123}\psi_{3,2} + \epsilon_{132}\psi_{2,3} = \varphi_{,1}\,,$$

$$u_2(x_1) = \varphi_{,2} + \epsilon_{231}\psi_{1,3} + \epsilon_{213}\psi_{3,1} = \psi_{3,1}\,,$$
$$u_3(x_1) = \varphi_{,3} + \epsilon_{312}\psi_{2,1} + \epsilon_{321}\psi_{1,3} = \psi_{2,1}$$

Таким образом, с помощью скалярной функции $\varphi(x_1)$ описываются продольные колебания материальных частиц при продольной волне, распространяющейся в направлении оси x_1 со скоростью c_1. При продольной волне, продольные колебания частиц представляют собой процесс периодического продольного растяжения-сжатия элементарных отрезков оси x_1.

С помощью векторной функции $\vec{\psi}(x_1)$ описываются поперечные колебания материальных частиц при поперечной волне, распространяющейся в направлении оси x_1 со скоростью c_2. Поперечное движение частиц в поперечной волне приводит к деформации сдвига в поперечном направлении.

2.2.2 Волны дилатации и волны сдвига. Покажем, что любые волны *в бесконечной изотропной среде* являются волнами дилатации и сдвига. Для этого применим к выражению (2.3) операцию дивиргенции и ротор, получим:

$$\varepsilon = u_{i,i} = div\,\vec{u} = div\,grad\,\varphi + \underbrace{rot\,div\,\vec{\psi}}_{0} = \Delta\varphi\,,$$
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,rot\,\vec{u} = \frac{1}{2}\underbrace{rot\,grad\,\varphi}_{0} + \frac{1}{2}\,rot\,rot\,\vec{\psi} = \frac{1}{2}\,rot\,rot\,\vec{\psi}$$

Применим далее оператор Лапласа к скалярному волновому уравнению (2.7) и оператор $\frac{1}{2}\,rot\,rot$ к векторному волновому уравнению (2.8). В результате получим волновые уравнения для дилатации (растяжение-сжатие элемента объёма) и вектора вращения окрестности точки, что эквивалентно элементарному сдвигу в в плоскости, перпендикулярной вектору вращения.

$$\Delta\varepsilon - \frac{1}{c_1^2}\,\ddot{\varepsilon} = -\frac{1}{c_1^2}\,\Delta\Phi\,, \tag{2.10}$$
$$\Delta\vec{\omega} - \frac{1}{c_2^2}\,\ddot{\vec{\omega}} = -\frac{1}{2c_2^2}\;rot\,rot\,\vec{\Psi} \tag{2.11}$$

Скорость волн дилатации c_1 больше скорости волн сдвига c_2.

Пусть в некоторой точке в какой то момент времени задано смещение, либо этой точке придана некоторая скорость, либо одновременно задано и то и другое (так можно моделировать землетрясение). Из этой точки распространяются волны дилатации и волны сдвига, причем до наблюдателя вначале придут волны дилатации, а уже потом, по истечении времени — волны сдвига. По этой причине волны дилатации называются первичными волнами (P-волны), а волны сдвига — вторичными волнами (S-волны).

2.2.3 Плоская волна в бесконечном пространстве. Изучим плоскую волну другим способом. Пусть объёмные нагрузки отсутствуют и в движении находятся точки плоскости перпендикулярной оси x_1. То есть, все материальные точки плоскости имеют одинаковое смещение $u_1(x_1,t)$ в направлении оси x_1, а также одинаковые смещения $u_2(x_1,t)$ и $u_3(x_1,t)$ в направлениях осей x_2 и x_3, соответственно.

В этом случае в пространстве распространяется плоская волна $u_i = u_i(x_1,t)$ и уравнения движения (2.2) примут вид:

$$(\lambda + \mu)\,\delta_{i1}u_1'' + \mu u_i'' = \varrho\ddot{u}_i \tag{2.12}$$

Отсюда получим уравнения для перемещения u_1 в направлении оси x_1 и для перемещений u_2, u_3 в направлениях осей x_2 и x_3

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u_1 = 0\,, \qquad \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)(u_2, u_3) = 0 \tag{2.13}$$

Уравнение для u_1 представляет собой волновое уравнение, описывающее распространение начального возмущения в направлении оси x_1 со скоростью c_1. Таким образом направление движения волны и направление движения материальной частицы совпадают. Эта волна называется продольной волной. Другие две волны также распространяются в направлении оси x_1, но с меньшей скоростью $c_2 < c_1$ и частицы при таких волнах движутся в поперечном направлении. Эти волны являются поперечными волнами.

2.2.4 Решение Даламбера одномерного волнового уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u = 0\,, \tag{2.14}$$

где u обозначает одну из компонент вектора перемещений, а c это либо c_1, либо c_2. Сделаем замену переменных, положив

$$\xi = x_1 + ct\,, \qquad \eta = x_1 - ct$$

Выразим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,,\\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big)
\end{aligned}$$

и подставим в уравнение (2.14), получим

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{2.15}$$

Отсюда находим

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{u(x_1, t) = f(x_1 + ct) + g(x_1 - ct)}}\,, \tag{2.16}$$

где f и g — произвольные функции своих аргументов. Выбор функций f и g зависит от начальных условий

$$u(x_1, 0) = \alpha(x_1), \qquad \dot{u}(x_1, 0) = \beta(x_1) \tag{2.17}$$

Рассмотрим подробнее второе условие

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\partial f(x_1+ct)}{\partial t} + \frac{\partial g(x_1-ct)}{\partial t}\Big]_{t=0} &= \Big[\frac{df(\xi)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{df(\eta)}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\Big]_{t=0} =\\
&= \frac{df(x_1)}{dx_1}\cdot c - \frac{dg(x_1)}{dx_1}\cdot c = \beta(x_1)
\end{aligned}$$

В итоге, из первого и второго условий (2.17) получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} f(x_1) + g(x_1) = \alpha(x_1) \\ f(x_1) - g(x_1) = \frac{1}{c} \int\limits_0^{x_1} \beta(y) dy \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$f(x_1) = \frac{1}{2}\alpha(x_1) + \int\limits_0^{x_1} \beta(y)dy, \qquad g(x_1) = \frac{1}{2}\alpha(x_1) - \int\limits_0^{x_1} \beta(y)dy\,,$$

Заменив теперь у функции $f(x_1)$ аргумент x_1 на x_1+ct, а у функции $g(x_1)$ на x_1-ct, получаем:

$$f(x_1+ct) = \frac{1}{2}\alpha(x_1+ct) + \int\limits_0^{x_1+ct} \beta(y)dy, \qquad g(x_1-ct) = \frac{1}{2}\alpha(x_1-ct) - \int\limits_0^{x_1-ct} \beta(y)dy\,, \quad (2.18)$$

Подставив выражения (2.18) в формулу (2.16) получим решение Даламбера уравнения плоской волны в бесконечном изотропном упругом пространстве

$$\boxed{\boldsymbol{u(x_1,t) = \frac{\alpha(x_1+ct)+\alpha(x_1-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x_1-ct}^{x_1+ct} \beta(y)dy}} \quad (2.19)$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$\beta(x_1) \equiv 0\,, \qquad \alpha(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |x_1| > a \\ 1, & \text{если} \quad |x_1| \leqslant a \end{cases}$$

В этом случае

$$u(x_1,t) = \frac{\alpha(x_1+ct)+\alpha(x_1-ct)}{2} \quad (2.20)$$

При заданных моментах времени $t = \frac{na}{2c}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\alpha(x_1 - an/2) = 1\,, \quad \text{если} \quad \frac{a(n-2)}{2} \leqslant x_1 \leqslant \frac{a(n+2)}{2}\,,$$
$$\alpha(x_1 + an/2) = 1\,, \quad \text{если} \quad -\frac{a(n+2)}{2} \leqslant x_1 \leqslant -\frac{a(n-2)}{2}$$

Графики зависимости u от координаты x_1 при различных значениях времени t показаны на рисунке 2. В начальный момент времени смещения имеют только точки принадлежащие отрезку $-a \leqslant x_1 \leqslant +a$. Далее с течением времени возмущение распространяется на соседние точки оси x_1, лежащие справа и слева от возмущённой области. При этом *величина возмущения* разделяется поровну между правыми и левыми точками, получившеми перемещения. К моменту $t = a/c$ ненулевые перемещения имеют точки отрезка ровно в два раза более длинного, чем в начальный момент времени. Однако величина перемещений точек уменьшилась также в два раза. Далее при $t = 3a/2c$, точки принадлежащие интервалу $-a/2 < x_1, a/2$, возвращаются в начальное невозмущенное состояние, а точки отрезков $[-5a/2, -a/2]$, $[a/2, 5a/2]$ имеют перемещение равное $1/2$.

Таким образом, начальное возмущение распространяется со скорость c вправо в виде прямоугольного горба $u = \alpha(x_1 - ct)/2 = 1/2$, и влево в виде такого же горба $u = \alpha(x_1 + ct)/2 = 1/2$.

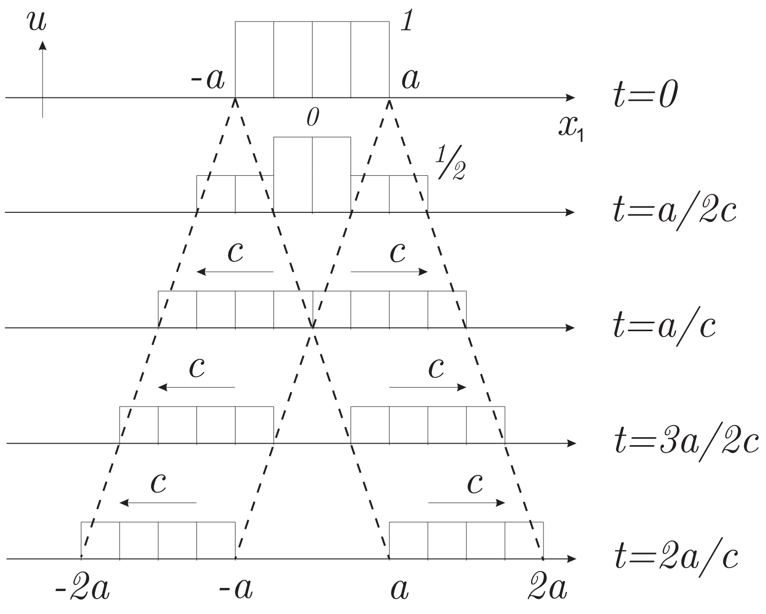

Рис. 2:

2.2.5 Плоская волна в произвольном направлении.

Пусть *направление плоской волны*, определяется единичным вектором $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, перпендикулярным плоскости. В этом случае компоненты вектора перемещений точек плоскости зависят от величины $\eta = \vec{n}\,\vec{x} - ct = n_k x_k - ct$, где c — искомая скорость распространения волны (возмущения)[2]

$$u_i(x,t) = u_i(n_k x_k - ct) \tag{2.21}$$

Подставив u_i в уравнения движения (2.2), получим:

$$(\lambda + \mu) u_j'' n_j n_i + \mu u_i'' = \varrho c^2 u_i'' \tag{2.22}$$

Эта система однородных уравнений относительно u_i'' имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} (\lambda+\mu)n_1^2 + \mu - \varrho c^2 & (\lambda+\mu)n_1 n_2 & (\lambda+\mu)n_1 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_2 n_1 & (\lambda+\mu)n_2^2 + \mu - \varrho c^2 & (\lambda+\mu)n_2 n_3 \\ (\lambda+\mu)n_3 n_1 & (\lambda+\mu)n_2 n_3 & (\lambda+\mu)n_3^2 + \mu - \varrho c^2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель приходим к следующему уравнению для скорости волны бегущей в заданном направлении $\vec{n}$ [6, стр. 559]

$$(\mu - \varrho c^2)^2 (\lambda + 2\mu - \varrho c^2) = 0$$

Отсюда

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

Таким образом, волна в изотропном теле в произвольном направлении может распространяться либо со скоростью c_1, либо со скоростью c_2. Причём, c_1 это скорость

[2]направление распространения волны задано вектором $\vec{n}$, поэтому точка $x_1^* = \vec{n}\,\vec{x}$ есть координата точки на линии параллельной вектору $\vec{n}$, в направлении которого бежит плоская волна. Другими словами мы ищем волну, распространяющуюся в положительном направлении. Можно искать волну и в отрицательном направлении, и получить для скорости распространения волны те же значения.

продольной волны вдоль выбранного направления, а c_2 — скорость поперечной волны к этому направлению.

В самом деле, умножая уравнение (2.22) на n_i и суммирую по индексу i получим, что перемещение $u_n = \vec{u}\vec{n}$ вдоль направления вектора $\vec{n}$ удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u_n = 0$$

Если же уравнение (2.22) умножить на τ_i — компоненты произвольного единичного вектора $\vec{\tau}$ перпендикулярного $\vec{n}$, тогда перемещение $u_\tau = \vec{u}\vec{\tau}$ поперёк направления $\vec{n}$ будет удовлетворять такому же волновому уравнению, где вместо c_2 стоит c_1

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)u_\tau = 0$$

2.2.6 Плоские гармонические волны. Плоской гармонической волной, распространяющейся в направлении оси x_1 называется волна вида

$$u(x_1, t) = u_0 e^{i(kx_1 - \omega t)} = u_0\big[\cos((kx_1 - \omega t) + i\sin((kx_1 - \omega t)\big] \tag{2.23}$$

Здесь u_0 — комплексная амплитуда, i — комплексная единица, коэффициент $\mathbf{k}$ называется волновым числом, $\boldsymbol{\omega}$ — частота гармонических колебаний. Функция, стоящая в правой части выражения (2.23) периодична по координате x_1 и по времени t с периодами $\boldsymbol{l = 2\pi/k}$ и $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$, соответственно. *Число $l = 2\pi/k$ при $k > 0$ называется длиной волны.* Волна вида (2.23) должна быть решением волнового уравнения (2.14). Если подставить выражение (2.23) в это уравнение, то оно удовлетворится при

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm\frac{\omega}{c}\,, \tag{2.24}$$

тогда длина волны выражается через скорость волны и через её частоту $\boldsymbol{l = 2\pi c/\omega}$, а общим гармоническим решением волнового уравнения является функция

$$u(x_1, t) = u_0^- e^{i(-\frac{\omega}{c}x_1 - \omega t)} + u_0^+ e^{i(\frac{\omega}{c}x_1 - \omega t)} = u_0^- e^{-\frac{i\omega}{c}(x_1 + ct)} + u_0^+ e^{-\frac{i\omega}{c}(x_1 - ct)}\,, \tag{2.25}$$

или

$$u(x_1, t) = u_0^{\mp} e^{-\frac{2\pi i}{l}(x_1 \pm ct)} = u_0^{\mp} e^{-2\pi i(\frac{x_1}{l} \pm \frac{t}{T})} \tag{2.26}$$

Решение (2.25) является частным случаем решения Даламбера. В самом деле формула (2.25) перейдёт в формулу (2.16), если ней положить

$$f(x_1, t) = u_0^- e^{-\frac{i\omega}{c}(x_1 + ct)}\,, \qquad g(x_1, t) = u_0^+ e^{-\frac{i\omega}{c}(x_1 - ct)}$$

2.2.7 Волны в анизотропной среде. В анизотропной среде волновые процессы обладают гораздо большим разнообразием. Рассмотрим, для примера, распространение плоской волны в анизотропной среде. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор направления волны. Решение уравнений движения (1.4) при нулевых объёмных силах ищем, также как и в случае изотропии, в виде (2.21). Вместо уравнения (2.22) получаем:

$$C_{ijkl}u_k'' n_j n_l = \varrho c^2 u_i'' \tag{2.27}$$

Нетривиальное решение однородной системы из трёх уравнений относительно трёх неизвестных u_i'', будет возможно, если определитель этой системы равен нулю, то есть

$$\det\big[C_{ijkl}n_j n_l - \varrho c^2\delta_{ik}\big] = 0\,, \tag{2.28}$$

или [7, стр. 95]

$$\frac{1}{6}\epsilon_{ipq}\epsilon_{krs}\left[a_{ik}-\varrho c^2\delta_{ik}\right]\left[a_{pr}-\varrho c^2\delta_{pr}\right]\left[a_{qs}-\varrho c^2\delta_{qs}\right]=0\,, \tag{2.29}$$

где

$$a_{ik}\equiv C_{ijkl}n_jn_l \tag{2.30}$$

Уравнение (2.28) представляет собой кубическое уравнение относительно c^2. Оно имеет *три действительных положительных корня*, поскольку квадратичная форма $a_{ik}\xi_i\xi_j>0$ при любых $\vec{\xi}\neq 0$ [8, стр. 312]. В общем случае анизотропии все три корня различны и соответствуют трём различным скоростям распространения возмущения в анизотропной среде в заданном направлении. Величина этих скоростей зависит от компонент тензора модулей упругости и от направления распространения волны, определяемого вектором $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$.

Следовательно **в анизотропной среде возможно бесчисленное множество скоростей распространения волн**.

Список литературы

[1] Филиппов И.Г., Егорычев О.А. *Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах.* Машиностроение, Москва, 1977.

[2] Поручиков В.Б. *Методы динамической теории упругости.* Наука, Москва, 1986.

[3] Р. Бишоп. *Колебания.* Наука, Москва, 1968.

[4] Исраилов М.Ш. *Динамическая теория упругости и дифракция волн.* Издательство МГУ, Москва, 1992.

[5] Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности.* МГУ, Москва, 1995.

[6] Новацкий В. *Теория упругости.* Мир, Москва, 1975.

[7] Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу. 2-е изд.* МГУ, Москва, 1979.

[8] Ляв А. *Математическая теория упругости.* ОНТИ НКТП СССР, М-Л, 1935.