МДТТ ЛЕКЦИЯ №6 (24.03.2020)
Волны Релея и Лява.

1 Гармонические волны в полупространстве.

1.1 Волны Релея.

Волнами Релея называются гармонические волны, распространяющиеся в полупространстве из однородного изотропного материала.

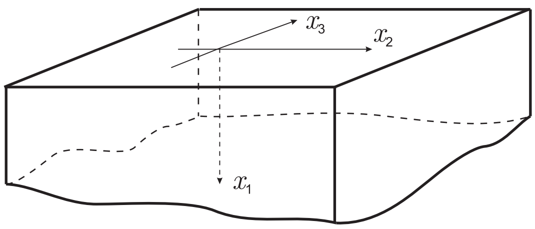
1.1.1 Постановка задачи.

Направим ось x_1 декартовой системы координат вглубь полупространства, а оси x_2 и x_3 расположим на границе полупространства рис. 1.

Постановка задачи включает уравнения движения при отсутствии объёмных нагрузок

$$(\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \varrho \ddot{u}_i\,, \qquad (1.1)$$

граничные условия на свободной поверхности полупространства



$$\sigma_{i1}(0, x_2, x_3, t) = 0\,, \qquad (1.2)$$

Рис. 1:

и условия на бесконечности

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) \ \to \ 0 \qquad (1.3)$$

1.1.2 Случай плоских возмущений.

Пусть возмущения, вызывающие волну не зависят от координаты x_3. В этом случае среда находится в состоянии плоской деформации в плоскости x_1x_2, т.е.

$$u_I = u_I(x_1, x_2, t)\,, \qquad u_3 \equiv 0 \qquad (1.4)$$

Отсюда вытекает, что $\varepsilon_{i3} \equiv 0$, а значит и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Кроме этого из (1.4) следует, что волновые потенциалы, через которые выражаются перемещения, также не зависят от координаты x_3, причём

$$u_I = \varphi_{,I} + \epsilon_{IJ3}\psi_{3,J} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \varphi_{,1} + \psi_{,2}\,, \quad u_2 = \varphi_{,2} - \psi_{,1}\,, \qquad (1.5)$$

где $\psi(x_1,x_2,t)\equiv\psi_3(x_1,x_2,t)$.

После этого волновые уравнения принимают вид:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=0\,,\qquad\left(\Delta-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0 \tag{1.6}$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$ — двумерный оператор Лапласа.

Будем искать гармоническую волну, распространяющуюся в направлении оси x_2. В этом случае волновые потенциалы представляются в виде:

$$\varphi(x_1,x_2,t)=\Phi(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}\,,\qquad\psi(x_1,x_2,t)=\Psi(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)} \tag{1.7}$$

Через ω, как обычно, обозначена частота волны. k — волновое число, $k=\omega/c_{_R}$, $c_{_R}$ — скорость распространения искомой волны Релея. Подстановка потенциалов (1.7) в уравнения (1.6) даёт два обыкновенных дифференциальных уравнения для амплитуд $\Phi(x_1)$ и $\Psi(x_1)$

$$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2}-\alpha_1^2\Phi=0\,,\qquad\frac{d^2\Psi}{dx_1^2}-\alpha_2^2\Psi=0\,, \tag{1.8}$$

где

$$\alpha_{_I}=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_{_I}^2}}=\omega\sqrt{\frac{1}{c_{_R}^2}-\frac{1}{c_{_I}^2}} \tag{1.9}$$

Отсюда сразу видно, что искомая скорость волны Релея должна быть меньше скоростей волн сдвига и дилатации, то есть

$$c_{_R}<c_2<c_1$$

Из обыкновенных дифференциальных уравнений (1.8) найдём решения, стремящиеся к нулю при увеличении глубины, т.е. при $x_1\ \to\ \infty$

$$\Phi(x_1)=Ae^{-\alpha_1x_1}\,,\qquad\Psi(x_1)=Be^{-\alpha_2x_1} \tag{1.10}$$

Таким образом, волновые потенциалы примут вид:

$$\varphi(x_1,x_2,t)=Ae^{-\alpha_1x_1+i(kx_2-\omega t)}\,,\qquad\psi(x_1,x_2,t)=Be^{-\alpha_2x_1+i(kx_2-\omega t)} \tag{1.11}$$

Далее необходимо удовлетворить оставшимся условиям свободной поверхности полупространства

$$\sigma_{11}(0,x_2,t)=0\,,\qquad\sigma_{12}(0,x_2,t)=0 \tag{1.12}$$

Вначале найдём перемещения

$$\begin{aligned}u_1&=\varphi_{,1}+\psi_{,2}=\left(-A\alpha_1e^{-\alpha_1x_1}+Bike^{-\alpha_2x_1}\right)e^{i(kx_2-\omega t)}\,,\\u_2&=\varphi_{,2}-\psi_{,1}=\left(Aike^{-\alpha_1x_1}+B\alpha_2e^{-\alpha_2x_1}\right)e^{i(kx_2-\omega t)}\end{aligned} \tag{1.13}$$

После этого, из закона Гука получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\lambda\varepsilon+2\mu\varepsilon_{11}=\lambda(u_{1,1}+u_{2,2})+2\mu u_{1,1}=(2\mu\varphi_{,11}+\lambda\Delta\varphi+2\mu\psi_{,12})\ ,\\\sigma_{12}&=2\mu\varepsilon_{12}=\mu(u_{1,2}+u_{2,1})=\mu\left(2\varphi_{,12}+\psi_{,22}-\psi_{,11}\right)\end{aligned} \tag{1.14}$$

Отсюда, из (1.13), и из граничных условий (1.12) получим однородную систему из двух уравнений для констант A и B:

$$\left\{\begin{array}{l}A\left[\lambda(\alpha_1^2-k^2)+2\mu\alpha_1^2\right]+B\,i\,2\mu k\alpha_2=0\\A\,i\,2\mu k\alpha_1+B\,\mu(\alpha_2^2+k^2)=0\end{array}\right. \tag{1.15}$$

Поскольку эти константы должны быть ненулевыми, постольку определитель системы должен быть равен нулю. Отсюда получим уравнение:

$$\left[\frac{\lambda}{\mu}(\nu_1^2-k^2)+2\nu_1^2\right](\nu_2^2+k^2)-2\nu_1\nu_2k^2=0 \tag{1.16}$$

1.1.3 Уравнение для скорости волн Релея.

Преобразуем уравнение (1.13) вводя две безразмерные величины: $\vartheta = c_2^2/c_1^2$ — отношение квадрата скорости поперечных волн к квадрату скорости продольных волн (величина, зависящая от коэффициента Пуассона среды) и $\eta = c_R^2/c_2^2$ — отношение квадрата скорости волн Релея к квадрату скорости волн сдвига (искомая величина)

$$\vartheta = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\mu/\varrho}{(\lambda+2\mu)/\varrho} = \frac{1}{\lambda/\mu+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu} < 1\,, \qquad \eta = \frac{c_R^2}{c_2^2} < 1$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона. После этого коэффициенты $\alpha_{_I}$ и отношение λ/μ можно представить в виде:

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{c_1\eta\vartheta}\sqrt{1-\eta\theta}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{\omega}{c_2\eta}\sqrt{1-\eta}\,, \qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\vartheta^2} - 2 \tag{1.17}$$

После подстановки выражений (1.17) в уравнение (1.16) получим следующее уравнение

$$(2-\eta^2) = 4\sqrt{1-\eta\theta}\;\sqrt{1-\eta}\,, \tag{1.18}$$

или

$$\eta\big[\eta^3 - 8\eta^2 + (24-16\vartheta)\eta - 16(1-\vartheta)\big] = 0 \tag{1.19}$$

При заданных $0 < \vartheta < 1$ значения η, удовлетворяющие условию $0 < \eta < 1$ получаются из решения кубического уравнения

$$\eta^3 - 8\eta^2 + (24-16\vartheta)\eta - 16(1-\vartheta) = 0$$

.

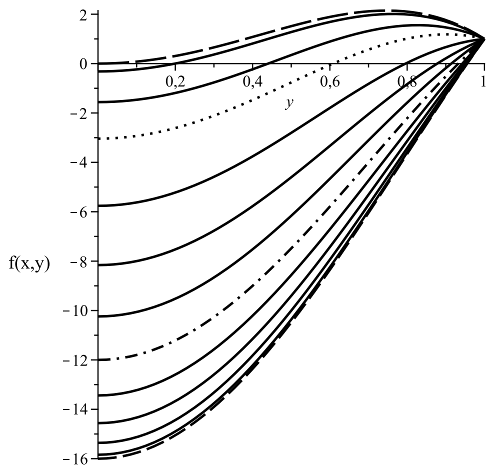


Рис. 2:

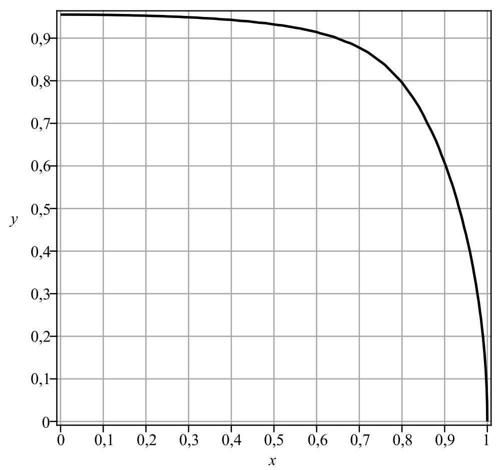


Рис. 3: Зависимость безразмерной скорости волны Релея от отношения скорости поперечных волн к скорости продольных волн

1.1.4 Графики для расчёта скоростей волн Релея.

Пусть $\boldsymbol{x = c_2/c_1}$ — отношение скорости поперечных волн к скорости продольных волн в бесконечной изотропной упругой среде (**заданная величина**), $\boldsymbol{y = c_R/c_2}$ —

безразмерная скорость поверхностных волн Релея (**искомая величина**). Тогда $\vartheta = x^2$, $\eta = y^2$.

Обозначим

$$f(x,y) \equiv y^6 - 8y^4 + (24 - 16x^2)y^2 - 16(1 - x^2) \tag{1.20}$$

На рисунке 2 приведена серия графиков функции $f(x,y)$ в зависимости от $y = c_R/c_2$ при фиксированных значениях $x = c_2/c_1 = 0$; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95; 0.99; 1 (снизу вверх в порядке перечисленных значений параметра x). Штрихами, штрихпунктирами, пунктирами и длинными штрихами помечены кривые, соответствующие значениям $x = 0$; 0.5; 0.9 и $x = 1$. Пересечение каждой из кривых с осью y даёт те значения параметра y, при которых $f(x,y) = 0$. На следующем рисунке показана более подробная зависимость $y(x)$, полученная из уравнения $f(x,y) = 0$. **Из рисунка 3 по заданным значениям $x = c_2/c_1$ можно быстро найти приближенные значения $y = c_R/c_2$ безразмерной скорости волн Релея**

В случае поверхностных волн Релея частицы среды перемещаются в плоскости x_1x_2, а волна распространяется в направлении оси x_2. При этом, волны Релея не являются ни продольными (по оси x_2), ни поперечными (по оси x_1) волнами.

1.2 Волны Лява.

Волнами Лява называются гармонические волны распространяющиеся в *двухслойном упругом полупространстве*, в котором свойства меняются скачком при переходе через границу раздела слоёв.

1.2.1 Постановка задачи.

Пусть h толщина слоя, прилегающего к свободной границе полупространства.

Материальные константы слоя обозначим через λ_1, μ_1, ϱ_1. Скорость поперечных волн в пространстве из материала слоя будем обозначать через $b_1 = \sqrt{\mu_1/\varrho_1}$. Соответствующие величины материала основной среды будем обозначать теми же самыми символами, только с индексом 2, т.е. λ_2, μ_2, ϱ_2, $b_2 = \sqrt{\mu_2/\varrho_2}$.

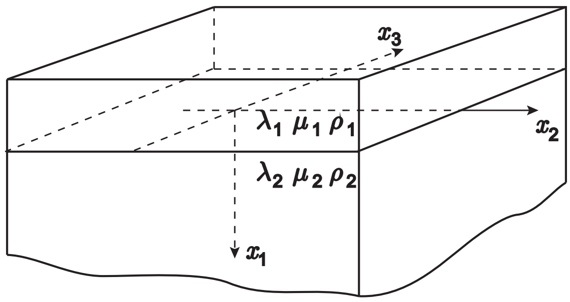


Рис. 4:

Начало декартовых координат расположим на границе раздела слоёв, ось x_1 декартовой системы координат направим вглубь полупространства рис. 4.

Постановка задачи, также как и в случае волн Релея, состоит из уравнений равновесия в слое и в основной среде (индексы у материальных констант опущены)

$$(\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \varrho \ddot{u}_i\,, \tag{1.21}$$

граничных условий на свободной поверхности полупространства

$$\sigma_{i1(1)}(-h, x_2, x_3, t) = 0\,, \tag{1.22}$$

контактных условий на границе раздела слоёв

$$\begin{aligned} [[u_i]]_{x_1=0} &\equiv u_{i(2)}(0, x_2, x_3, t) - u_{i(1)}(0, x_2, x_3, t) = 0\,, \\ [[\sigma_{i1}]]_{x_1=0} &\equiv \sigma_{i1(2)}(0, x_2, x_3, t) - \sigma_{i1(1)}(0, x_2, x_3, t) = 0\,, \end{aligned} \tag{1.23}$$

и условий на бесконечности

$$u_{i(2)}(x_1,x_2,x_3,t)\ \to\ 0 \quad \text{при} \quad x_1\to\infty \tag{1.24}$$

1.2.2 Поперечные волны в двухслойной среде.

Ляв в 1926 году [1, стр. 688, см. ссылку] показал, что **в том случае, когда верхний слой менее жесткий, чем основной материал, в среде могут существовать поперечные (по оси x_3) волны, распространяющиеся в направлении оси оси x_2, т.е. волны вида**

$$\boldsymbol{\vec{u} = (0,\ 0,\ u_3)\,, \qquad u_3 = \Phi(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}\,,} \tag{1.25}$$

где k — волновое число волн Лява $k=\omega/c_L$. Здесь c_L — искомая скорость поперечных волн Лява. Из соотношений Коши и закона Гука найдём отличные от нуля компоненты деформаций и напряжений

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{31}=\frac{1}{2}\,u_{3,1}=\frac{1}{2}\,\Phi'(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}\,, &&\varepsilon_{32}=\frac{1}{2}\,u_{3,2}=\frac{ik}{2}\,\Phi(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}\,,\\
&\sigma_{31}=2\mu\varepsilon_{3,1}=\mu\,\Phi'(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}\,, &&\sigma_{32}=2\mu\varepsilon_{3,2}=\mu ik\,\Phi(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Подстановка (1.25) в уравнения движения приводит к волновому уравнению для компоненты u_3 вектора перемещений

$$\Big(\mu\Delta-\varrho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)\,u_3=0 \quad\Rightarrow\quad \mu\big(\Phi''-k^2\Phi\big)+\varrho\omega^2\Phi=0 \tag{1.27}$$

Уравнение (1.27) справедливо в обоих слоях, т.е. в каждом из слоёв оно имеет вид:

$$\Phi_1''-k^2\Big(1-\frac{c_L^2}{b_1^2}\Big)\,\Phi_1=0\,,\quad \text{при}\ \ -h\leqslant x_1\leqslant 0\,, \tag{1.28}$$

$$\Phi_2''-k^2\Big(1-\frac{c_L^2}{b_2^2}\Big)\,\Phi_2=0\,,\quad \text{при}\quad 0\leqslant x_1<\infty \tag{1.29}$$

1.2.3 Граничные и контактные условия.

Условия (1.22)–(1.24) сводятся к условиям на функции Φ_1 и Φ_2

$$\sigma_{31(1)}(-h,x_2,t)=0 \qquad\Rightarrow\quad \Phi_1'(-h)=0\,; \tag{1.30}$$

$$u_{3(1)}(0,x_2,t)=u_{3(2)}(0,x_2,t) \qquad\Rightarrow\quad \Phi_1(0)=\Phi_2(0)\,; \tag{1.31}$$

$$\sigma_{31(1)}(0,x_2,t)=\sigma_{31(2)}(0,x_2,t) \qquad\Rightarrow\quad \mu_1\Phi_1'(0)=\mu_2\Phi_2'(0)\,; \tag{1.32}$$

$$u_{3(2)}(x_1,x_2,t)\ \to\ 0\quad\text{при}\quad x_1\to\infty \qquad\Rightarrow\quad \Phi_2(x_1)\ \to\ 0\quad\text{при}\quad x_1\to\infty \tag{1.33}$$

Решением уравнения (1.29) является действительная функция $\Phi_2(x_1)$, которая должна стремиться к нулю при $x_1\to\infty$, а для этого нужно чтобы

$$1-\frac{c_L^2}{b_2^2}>0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{c_L<b_2}}\,, \tag{1.34}$$

тогда

$$\Phi_2(x_1)=C\,e^{-k\beta_2x_1}\,,\quad \text{где}\quad \beta_2=\sqrt{1-\frac{c_L^2}{b_2^2}} \tag{1.35}$$

Уравнение (1.28), в зависимости от знака величины $1 - c_L^2/b_1^2$, имеет два различных решения. Предположим, что $\boxed{\mathbf{c_L < b_1}}$, тогда

$$\Phi_1(x_1) = A\, e^{k\beta_1 x_1} + B\, e^{-k\beta_1 x_1}\,, \text{ где } \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{c_L^2}{b_1^2}} \tag{1.36}$$

Если же $\boxed{\mathbf{c_L > b_1}}$, тогда

$$\Phi_1(x_1) = A\, \sin k\beta_1 x_1 + B\, \cos k\beta_1 x_1\,, \text{ где } \beta_1 = \sqrt{\frac{c_L^2}{b_1^2} - 1} \tag{1.37}$$

Удовлетворение трём условиям (1.30), (1.32) приводит к системе из трёх однородных уравнений относительно констант A, B, C. В первом случае эта система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\, e^{-k\beta_1 h} - B\, e^{k\beta_1 h} = 0 \\ A + B = C \\ \mu_1\beta_1 (A - B) = -\mu_2\beta_2\, C \end{array} \right. , \qquad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{c_L^2}{b_1^2}} \tag{1.38}$$

Во втором случае получаем другую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} A\, \cos k\beta_1 h + B\, \sin k\beta_1 h = 0 \\ B = C \\ \mu_1\beta_1\, A = -\mu_2\beta_2\, C \end{array} \right. , \qquad \beta_1 = \sqrt{\frac{c_L^2}{b_1^2} - 1} \tag{1.39}$$

Нетривиальное решение системы уравнений (1.38) будет возможно, если определитель этой системы обращается в нуль. Откуда следует, что c_L является корнем уравнения

$$\mu_1\beta_1 \left(1 - e^{2k\beta_1 h}\right) = \mu_2\beta_2 \left(1 + e^{2k\beta_1 h}\right)\,, \qquad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{c_L^2}{b_1^2}}\,, \quad k = \frac{\omega}{c_L} \tag{1.40}$$

Во втором случае нетривиальное решение системы (1.38) имеет место, если c_L будет корнем другого уравнения:

$$\mu_1\beta_1 \sin\left(k\beta_1 h\right) = \mu_2\beta_2 \cos\left(k\beta_1 h\right), \qquad \beta_1 = \sqrt{\frac{c_L^2}{b_1^2} - 1}\,, \quad k = \frac{\omega}{c_L} \tag{1.41}$$

Уравнения (1.40) и (1.41) можно объединить в единое уравнение вида

$$-\mu_1\beta_1\, \mathrm{sh}\left(k\beta_1 h\right) = \mu_2\beta_2\, \mathrm{ch}\left(k\beta_1 h\right), \qquad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{c_L^2}{b_1^2}}\,, \quad k = \frac{\omega}{c_L}\,,$$

или же

$$\boldsymbol{\mu_2\beta_2 = -\mu_1\beta_1\, \mathrm{th}\left(k\beta_1 h\right), \qquad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{c_L^2}{b_1^2}}\,, \quad k = \frac{\omega}{c_L}\,,} \tag{1.42}$$

где $\mathrm{sh}\, x = [\exp(x) - \exp(-x)]/2$ — гиперболический синус, $\mathrm{ch}\, x = [\exp(x) + \exp(-x)]/2$ — гиперболический косинус, $\mathrm{th}\, x = \mathrm{sh}\, x / \mathrm{ch}\, x$ — гиперболический тангенс. В случае чисто мнимых аргументов $\mathrm{sh}\, ix = i \sin x$, $\mathrm{ch}\, ix = \cos x$. **При действительных $\boldsymbol{\beta_1}$ уравнение** (1.42) **совпадает с уравнением** (1.40)**, а при мнимых — с уравнением** (1.41).

Воспользуемся тем, что

$$\beta_1 = \sqrt{1-\frac{c_L^2}{b_1^2}} \;\Rightarrow\; c_L = b_1\sqrt{1-\beta_1^2}\,, \text{ **тогда** } \beta_2 = \sqrt{1-\frac{c_L^2}{b_2^2}} = \frac{b_1}{b_2}\sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2+\beta_1^2-1}\,, \quad (1.43)$$

$$k = \frac{\omega}{c_L} = \frac{\omega}{b_1\sqrt{1-\beta_1^2}} \qquad (1.44)$$

Подставим выражения для k и β_2 в уравнение (1.42) и перепишем его следующим образом:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\frac{\mu_2/\mu_1}{b_2/b_1}\sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2+\beta_1^2-1} = -\beta_1\ \mathrm{th}\left(\frac{\omega h}{b_1}\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right)}\,, \\ \boldsymbol{\sqrt{1-\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2} < \beta_1 < 1} \end{gathered} \qquad (1.45)$$

В другом случае вместо (1.43), (1.44) и (1.45) получаем:

$$\text{При } \beta_1 = \sqrt{\frac{c_L^2}{b_1^2}-1} \;\Rightarrow\; c_L = b_1\sqrt{1+\beta_1^2}\,, \;\Rightarrow\; \beta_2 = \sqrt{1-\frac{c_L^2}{b_2^2}} = \sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2-\beta_1^2-1}\,, \quad (1.46)$$

$$k = \frac{\omega}{c_L} = \frac{\omega}{b_1\sqrt{1+\beta_1^2}}\,, \qquad (1.47)$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\frac{\mu_2/\mu_1}{b_2/b_1}\sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2-\beta_1^2-1} = \beta_1\ \mathrm{tg}\left(\frac{\omega h}{b_1}\frac{\beta_1}{\sqrt{1+\beta_1^2}}\right)}\,, \\ \boldsymbol{0 < \beta_1 < \sqrt{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2-1}} \end{gathered} \qquad (1.48)$$

1.2.4 Дисперсионное уравнение. Скорость волн Лява.

В уравнении (1.45) гиперболический тангенс положителен при положительном аргументе, поэтому уравнение (1.45) не имеет действительных решений для β_1. Остаётся только уравнение (1.48), которое разрешимо при

$$\boldsymbol{b_2 > b_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu_2}{\varrho_2} > \frac{\mu_1}{\varrho_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu_2}{\mu_1} > \frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \qquad (1.49)$$

Таким образом, в том случае, когда верхняя накладка более мягкая по сдвигу чем основной материал, в полупространстве с накладкой возможна поперечная плоская волна, распространяющаяся в направлении оси $\boldsymbol{x_2}$. При этом скорость волн Лява $\boldsymbol{C_L = \sqrt{\mu_1(1+\beta_1^2)/\varrho_1}}$ зависит от частоты, то есть имеет место дисперсия волн.

Список литературы

[1] Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* Мир, Москва, 1970.