

МДТТ ЛЕКЦИЯ №7 (31.03.2020)
Исправленная и дополненная 06.04.2020.
Плоская задача теории упругости. Часть 1.
Профессор В.И. Горбачев. Кафедра механики композитов.

1	Плоская деформация.	2
1.1	Деформации и перемещения при плоской деформации.	2
1.2	Прямые определяющие соотношения при плоской деформации.	2
1.3	Обратные определяющие соотношения при плоской деформации.	3
1.4	Формулы для податливостей в обратных определяющих соотношениях. .	4
1.5	Условия совместности при плоской деформации.	4
2	Плоское напряженное состояние.	4
2.1	Чисто плоское напряженное состояние.	5
2.2	Обратные определяющие соотношения при плоском напряженном состо- янии.	5
2.3	Прямые определяющие соотношения при плоском напряженном состоянии.	5
2.4	Условия совместности деформаций при чисто плоском напряженном со- стоянии.	6
3	Обобщенное плоское напряженное состояние.	6
3.1	Условия реализации обобщенного плоского напряженного состояния. . .	6
3.2	Качественный анализ изменения напряжений по толщине пластины. . . .	7
3.3	Анализ характера изменения истинных деформаций и перемещений по толщине пластины.	8
3.4	Уравнения обобщенного плосконапряженного состояния пластины.	9
3.5	Уравнения совместности усреднённых деформаций.	10
3.6	Замечания о возможности восстановления истинного НДС по усреднён- ному НДС.	10
4	Постановка плоских задач теории упругости.	10
4.1	Плоская деформация и плоское напряжение.	11
4.2	Получение решения задачи для пластины из решения задачи о плоской деформации.	11
4.3	Получение решения задачи о плоской деформации из решения задачи для пластины.	11

О плоских задачах теории упругости.

Плоская задача составляет большой и наиболее разработанный раздел теории упругости. Термином "плоская задача" обозначают два физически различных случая равновесия упругого тела, объединенных общим математическим аппаратом — это задача о плоской деформации и о плоском напряженном состоянии [1].

1 Плоская деформация.

Состояние плоской деформации реализуется в неоднородном анизотропном призматическом (цилиндрическом) теле бесконечной длины, если:

- поверхностные и объёмные усилия не меняются вдоль образующей;
- тензоры модулей упругости и податливости также не меняются вдоль образующей;
- в каждой точке тела существует плоскость упругой симметрии нормальная к образующей.

При таких условиях все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях и, следовательно, плоские до деформации поперечные сечения остаются плоскими и после деформации, т.е. деформация является плоской.

В случае невыполнения третьего условия все поперечные сечения одинаково искривляются. Такого рода деформацию называют обобщенной плоской деформацией [2]. Плоская деформация при произвольной зависимости упругих свойств от координат рассмотрена Ломакиным В.А. [3].

1.1 Деформации и перемещения при плоской деформации.

Пусть ось x_3 перпендикулярна плоскости деформации, а оси x_1 и x_2 параллельны ей, тогда состояние плоской деформации означает, что

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2), \varepsilon_{22}(x_1, x_2), \varepsilon_{12}(x_1, x_2) = \varepsilon_{21}(x_1, x_2), \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0.$$

Или

$$\varepsilon_{IJ} = \varepsilon_{IJ}(x_1, x_2), \quad \varepsilon_{i3} = 0. \quad (1.1)$$

Как обычно, большие латинские индексы принимают значения 1 и 2, а маленькие — 1, 2, 3. Так, как $\varepsilon_{IJ} = (u_{I,J} + u_{J,I})/2$, а $\varepsilon_{i3} = (u_{i,3} + u_{3,i})/2 = 0$, следовательно

$$u_I = u_I(x_1, x_2), \quad u_3 = \text{const}. \quad (1.2)$$

1.2 Прямые определяющие соотношения при плоской деформации.

Прямые определяющие соотношения выражают напряжения через деформации. Из закона Гука имеем:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{KL} + 2C_{ijk3}\varepsilon_{K3} + C_{ij33}\varepsilon_{33} = C_{ijkl}\varepsilon_{KL} \quad (1.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}, \quad \sigma_{i3} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL} \quad (1.4)$$

Из первой формулы (1.4) получаем:

$$\varepsilon_{IJ} = C_{IJKL}^{-1}\sigma_{KL}, \quad (1.5)$$

где коэффициенты C_{IJKL}^{-1} обозначают компоненты матрицы обратной к матрице C_{IJKL} , то есть,

$$(C_{IJKL}^{-1}) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{pmatrix}^{-1}$$

Подставим теперь деформации (1.5) во вторую формулу (1.4) и выразим напряжения σ_{i3} через напряжения в плоскости деформаций

$$\sigma_{i3} = C_{i3KL} C_{KLMN}^{-1} \sigma_{MN}. \quad (1.6)$$

1.3 Обратные определяющие соотношения при плоской деформации.

Обратные определяющие соотношения выражают плоские деформации через плоские напряжения. Собственно это как раз и есть соотношения (1.5). Однако в них стоит обратная матрица из модулей упругости. Несложно её вычислить напрямую. Попробуем найти её другим способом. Попутно получим много других интересных зависимостей. Задача состоит в том, чтобы компоненты C_{IJKL}^{-1} обратной матрицы представить только через компоненты полного тензора податливостей J_{ijkl} и получить ограничения на анизотропию материала, при которой возможна плоская деформация в цилиндрическом теле.

Из обратного закона Гука, с использованием формулы (1.6), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= J_{ijMN} \sigma_{MN} + 2J_{ijP3} \sigma_{P3} + J_{ij33} \sigma_{33} = \\ &= (J_{ijMN} + 2J_{ijP3} C_{P3KL} C_{KLMN}^{-1} + J_{ij33} C_{33KL} C_{KLMN}^{-1}) \sigma_{MN} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда находим формулу, по которой компоненты тензора плоских деформаций ε_{IJ} выражаются через компоненты тензора плоских напряжений σ_{IJ} , то есть, обратные определяющие соотношения

$$\varepsilon_{IJ} = (J_{IJMN} + 2J_{IJP3} C_{P3KL} C_{KLMN}^{-1} + J_{IJ33} C_{33KL} C_{KLMN}^{-1}) \sigma_{MN}, \quad (1.8)$$

а также формулы для деформаций ε_{i3} , которые по условию равны нулю

$$\varepsilon_{i3} = (J_{i3MN} + 2J_{i3P3} C_{P3KL} C_{KLMN}^{-1} + J_{i333} C_{33KL} C_{KLMN}^{-1}) \sigma_{MN} = 0 \quad (1.9)$$

Далее, в равенстве (1.9), в силу линейной независимости напряжений σ_{MN} , нужно положить равным нулю выражение в скобках, то есть,

$$J_{i3MN} + 2J_{i3P3} C_{P3KL} C_{KLMN}^{-1} + J_{i333} C_{33KL} C_{KLMN}^{-1} = 0. \quad (1.10)$$

Равенства (1.10) представляют собой самые общие ограничения на коэффициенты анизотропии материала, при которых в призматическом теле возможно состояние плоской деформации. В этом общем случае в теле, кроме напряжений $\sigma_{IJ}(x_1, x_2)$, возникают также и напряжения $\sigma_{i3}(x_1, x_2)$, определяемые по формуле (1.6) через плоские напряжения σ_{IJ} .

Рассмотрим частный случай, когда плоскость деформации является одновременно и плоскостью симметрии упругих свойств. Это означает, что все компоненты тензора модулей упругости и тензора податливостей с нечетным количеством троек в индексах тождественно равны нулю.

В этом случае вместо условий (1.10) получаем условия попроще:

$$J_{33MN} + J_{3333} C_{33KL} C_{KLMN}^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{33KL} C_{KLMN}^{-1} = -\frac{J_{33MN}}{J_{3333}} \quad (1.11)$$

При этом $\sigma_{I3} = 0$ и отлично от нуля только продольное напряжение

$$\sigma_{33} = C_{33KL}C_{KLMN}^{-1}\sigma_{MN} = -\frac{J_{33MN}}{J_{3333}}\sigma_{MN} \quad (1.12)$$

В изотропном случае

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (1.13)$$

где ν — коэффициент Пуассона, а E — модуль Юнга.

1.4 Формулы для податливостей в обратных определяющих соотношениях.

Рассмотрим снова обратные определяющие соотношения выражающие плоские деформации ε_{IJ} через плоские напряжения σ_{IJ} . Формально они имеют вид (1.5) или же (1.8). В соотношениях (1.8) также, как и в (1.5), присутствуют компоненты C_{IJKL}^{-1} . Чтобы избавиться от них ограничимся случаем плоскости симметрии свойств, совпадающей с плоскостью деформаций (третье условие существования плоской деформации). Из формул (1.8) и (1.11) для этого случая получаем:

$$\varepsilon_{IJ} = (J_{IJMN} + J_{IJ33}C_{33KL}C_{KLMN}^{-1})\sigma_{MN} = \left(J_{IJKL} - \frac{J_{IJ33}J_{33KL}}{J_{3333}} \right) \sigma_{KL}. \quad (1.14)$$

Следовательно,

$$C_{IJKL}^{-1} = J_{IJKL} - \frac{J_{IJ33}J_{33KL}}{J_{3333}} \quad (1.15)$$

В изотропном случае

$$C_{IJKL}^{-1} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\delta_{IJ}\delta_{KL} + \frac{1+\nu}{E}\Delta_{IJKL} \quad (1.16)$$

1.5 Условия совместности при плоской деформации.

При плоской деформации существенными являются только три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{IJ}(x_1, x_2)$. Из общих уравнений совместности получаем

$$\epsilon_{\alpha ik}\epsilon_{\beta jl}\varepsilon_{ij,kl} = \epsilon_{3IK}\epsilon_{3JL}\varepsilon_{IJ,KL} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\varepsilon_{IJ,KL} = 0 \quad (1.17)$$

Таким образом, при плоской деформации имеется только одно условие совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (1.18)$$

2 Плоское напряженное состояние.

В задаче о плоском напряженном состоянии различают чисто плоское напряженное состояние и обобщенное плоское напряженное состояние.

Как и ранее, ось x_3 декартовых координат перпендикулярна плоскости, а оси x_1 и x_2 — лежат в плоскости напряжений.

Будем рассматривать случай, когда плоскость напряжений является одновременно и плоскостью симметрии упругих свойств. Это означает, что все компоненты тензора податливостей и тензора модулей упругости с нечетным количеством троек в индексах тождественно равны нулю.

2.1 Чисто плоское напряженное состояние.

При чисто плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{IJ} = \sigma_{IJ}(x_1, x_2), \quad \sigma_{i3} \equiv 0, \quad (2.1)$$

2.2 Обратные определяющие соотношения при плоском напряженном состоянии.

По обратному обобщенному закону Гука находим деформации

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl}\sigma_{KL}, \quad (2.2)$$

следовательно,

$$\varepsilon_{IJ} = J_{IJKL}\sigma_{KL}, \quad \varepsilon_{33} = J_{33KL}\sigma_{KL}, \quad (2.3)$$

то есть, кроме деформаций ε_{IJ} в плоскости присутствуют ещё и деформации ε_{33} .

Для определения напряжений через деформации из первого соотношения (2.4) нужно найти J_{IJKL}^{-1} — компоненты матрицы обратной к матрице с компонентами J_{IJKL} . Для этого воспользуемся прямым законом Гука. Попутно получим дополнительное соотношение, позволяющее найти деформацию ε_{33} через плоские деформации.

2.3 Прямые определяющие соотношения при плоском напряженном состоянии.

То есть, выражение плоских напряжений через деформации в плоскости и через поперечные деформации

$$\sigma_{IJ} = C_{IJKl}\varepsilon_{kl} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL} + C_{3333}\varepsilon_{33} \quad (2.4)$$

Учитывая, что $\sigma_{33} = 0$, из (2.4) найдём ε_{33}

$$0 = C_{33KL}\varepsilon_{KL} + C_{3333}\varepsilon_{33} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{33} = -\frac{C_{33KL}}{C_{3333}}\varepsilon_{KL}} \quad (2.5)$$

В изотропном случае

$$\boxed{\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})} \quad (2.6)$$

Подставив выражение (2.5) в формулу (2.4), получим окончательное выражение для обратного закона Гука при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_{IJ} = \left(C_{IJKL} - \frac{C_{IJ33}C_{33KL}}{C_{3333}} \right) \varepsilon_{KL}. \quad (2.7)$$

Итак, мы нашли коэффициенты J_{IJKL}^{-1} обратной матрицы, выраженные через коэффициенты полной матрицы жесткости

$$\boxed{J_{IJKL}^{-1} = C_{IJKL} - \frac{C_{IJ33}C_{33KL}}{C_{3333}}} \quad (2.8)$$

В изотропном случае

$$\boxed{J_{IJKL}^{-1} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}\delta_{IJ}\delta_{KL} + 2\mu\Delta_{IJKL} = \frac{E\nu(1 - \nu)}{1 + \nu}\delta_{IJ}\delta_{KL} + \frac{E}{1 + \nu}\Delta_{IJKL}} \quad (2.9)$$

2.4 Условия совместности деформаций при чисто плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим условия совместности деформаций в случае чисто плоского напряженного состояния. В этом случае $\varepsilon_{IJ}(x_1, x_2)$. Кроме этого, присутствуют также и поперечная деформация $\varepsilon_{33}(x_1, x_2)$.

Из общих уравнений совместности получаем

$$\epsilon_{\alpha ik} \epsilon_{\beta jl} \varepsilon_{ij,kl} = \epsilon_{\alpha iK} \epsilon_{\beta jL} \varepsilon_{ij,KL} = \epsilon_{\alpha IK} \epsilon_{\beta JL} \varepsilon_{IJ,KL} + \epsilon_{\alpha 3K} \epsilon_{\beta 3L} \varepsilon_{33,KL} = 0 \quad (2.10)$$

Полагая здесь $\alpha = 3$ и $\beta = 3$, найдем одно уравнение

$$\epsilon_{IK} \epsilon_{JL} \varepsilon_{IJ,KL} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (2.11)$$

Ещё три уравнения получим, если $\alpha = A$ и $\beta = B$, тогда

$$\begin{aligned} \epsilon_{A3K} \epsilon_{B3L} \varepsilon_{33,KL} = 0 &\Rightarrow \varepsilon_{33,KL} = 0 \Rightarrow \\ \varepsilon_{33,11} = 0, \quad \varepsilon_{33,22} = 0, \quad \varepsilon_{33,12} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Рассмотрим далее однородный изотропный случай и подставим в уравнения (2.12) выражения (2.6) для ε_{33}

$$(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})_{,11} = 0, \quad (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})_{,22} = 0, \quad (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})_{,12} = 0. \quad (2.13)$$

Отсюда получаем $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = ax_1 + bx_2 + c$, где a, b, c — константы.

Таким образом, случай чисто плоского напряженного состояния не представляет практического интереса, поскольку на деформации накладываются дополнительные ограничения (2.13)

3 Обобщенное плоское напряженное состояние.

Обобщенное плоское напряженное состояние можно реализовать в неоднородной анизотропной пластинке (диске) постоянной толщины h при дополнительных ограничениях. Расположим оси x_1, x_2 декартовой системы координат в срединной плоскости, а ось x_3 направим перпендикулярно к ней. Необходимые условия плоского напряженного состояния в пластине рассматривались, например, в работах [2, 4]

3.1 Условия реализации обобщенного плоского напряженного состояния.

Их довольно много если материал пластины неоднородный и анизотропный.

1. Лицевые поверхности $x_3 = \pm h/2$ свободны от нагрузок: $\sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0$.
2. Объёмные нагрузки, действуют в плоскостях параллельных срединной плоскости Σ , распределены симметрично относительно неё: $X_3 \equiv 0$, $X_I(x_1, x_2, x_3) = X_I(x_1, x_2, -x_3)$ и *незначительно меняются по толщине*.
3. Боковая поверхность пластины перпендикулярна её срединной плоскости.
4. Усилия, приложенные к боковой поверхности пластины Σ_b , действуют в плоскостях параллельных срединной плоскости и распределены симметрично относительно неё: $p_3^0 \equiv 0$, $p_I^0(x_1, x_2, x_3) = p_I^0(x_1, x_2, -x_3)$ и *незначительно меняются по толщине*.
5. Материал пластины обладает плоскостью симметрии упругих свойств, параллельной срединной плоскости: $C_{I3KL} = 0$, $C_{I333} = 0$.

6. Тензоры модулей упругости не меняются по толщине: $C_{IJKL} = C_{IJKL}(x_2, x_2)$, $C_{3zKL} = C_{3zKL}(x_2, x_2)$, $C_{3333} = C_{3333}(x_2, x_2)$.

При этих **шести** условиях срединная поверхность пластины из анизотропного и неоднородного материала остаётся плоской. В однородном изотропном случае остаются первые 4 условия.

3.2 Качественный анализ изменения напряжений по толщине пластины.

Для установления характера поведения напряжений будем исходить и трёхмерных уравнений равновесия с учетом ограничения на объёмные нагрузки:

$$\begin{cases} \sigma_{IJ,J} + \sigma_{I3,3} + X_I(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \sigma_{3J,J} + \sigma_{33,3} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}((x_1, x_2, \pm h/2) = 0, \quad \sigma_{3J}(x_1, x_2, x_3)n_J|_{\Sigma_b} = 0, \\ \sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)n_J|_{\Sigma_b} = p_I^0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ограничения на нагрузки:

$$X_I(x_1, x_2, -x_3) = X_I(x_1, x_2, x_3), \quad p_I^0(x_1, x_2, -x_3) = p_I^0(x_1, x_2, x_3) \quad (3.3)$$

Прежде всего, из третьего уравнения равновесия (3.1) вблизи лицевых поверхностей, оценим величину поперечного напряжения σ_{33}

$$\left[\frac{\partial \sigma_{3J}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_J} + \frac{\partial \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right]_{x_3 \rightarrow \pm h/2} = 0 \quad (3.4)$$

На лицевых поверхностях $\sigma_{3J}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0$, тогда из (3.4) вытекает, что там же равна нулю и производная $\sigma_{33,3}$, то есть

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0, \quad \sigma_{33,3}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0 \quad (3.5)$$

Разложим напряжение $\sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)$ в ряд Тейлора в окрестности лицевых поверхностей и учтём формулы (3.5)

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h/2) + (x_3 \mp h/2)\sigma_{33,3}(x_1, x_2, \pm h/2) + \\ + \frac{1}{2!}(x_3 \mp h/2)^2 \sigma_{33,33}(x_1, x_2, \pm h/2) + \dots = \frac{1}{2!}(x_3 \mp h/2)^2 \sigma_{33,33}(x_1, x_2, \pm h/2) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

На срединной плоскости, то есть, при $x_3 = 0$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, 0) = \frac{(h/2)^2}{2!} \sigma_{33,33}(x_1, x_2, \pm h/2) + \dots \neq 0 \quad (3.7)$$

Следовательно, напряжение **σ_{33} является четной по x_3 функцией**, величина которой порядка $(h/L)^2$, где L — характерный размер срединной плоскости.

Производная $\sigma_{33,3}$ является нечетной по x_3 функцией, кроме этого, $\sigma_{33,3}$ величина порядка h/L .

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, -x_3) = \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3), \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h/2) = 0 \quad (3.8)$$

Чем тоньше пластина, тем меньше становится поперечное напряжение σ_{33} по сравнению с напряжениями σ_{IJ} . По этой причине не будем его учитывать, то есть полагаем

$$\boxed{\sigma_{33} \approx 0} \quad (3.9)$$

Из второго уравнения (3.2) следует, что σ_{3J} нечетная по x_3 функция и величина порядка $(h/L)^1$, то есть

$$\sigma_{3J}(x_1, x_2, -x_3) = -\sigma_{3J}(x_1, x_2, x_3), \quad \bar{\sigma}_{3J} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3J}(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0 \quad (3.10)$$

Осталось выяснить характер поведения напряжений $\sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)$ на нормали к срединной поверхности. Это устанавливается по уравнениям (3.1). В первом уравнении компоненты $X_I(x_1, x_2, x_3)$ объёмной нагрузки и производные $\sigma_{I3,3}(x_1, x_2, x_3)$ симметричны по x_3 , следовательно напряжения $\sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3)$ симметричны по x_3 и являются величинами порядка $(h/L)^0$.

$$\sigma_{IJ}(x_1, x_2, -x_3) = \sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.11)$$

Подведём итог

σ_{IJ}	— симметрично,	$O\left(\frac{h^0}{L^0}\right)$,
σ_{I3}	— антисимметрично,	$O\left(\frac{h^1}{L^1}\right)$,
σ_{33}	— симметрично,	$O\left(\frac{h^2}{L^2}\right)$.

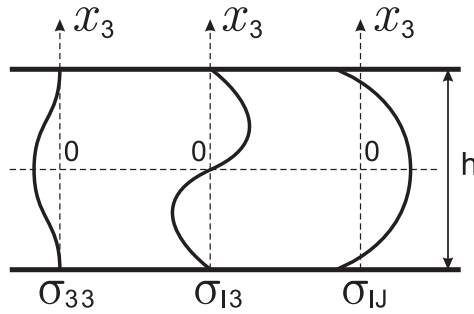


Рис. 1: Характер изменения напряжений по толщине пластины.

3.3 Анализ характера изменения истинных деформаций и перемещений по толщине пластины.

Воспользуемся обратным законом Гука для случая материала с плоскостью симметрии упругих свойств, параллельной срединной плоскости пластины.

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl}\sigma_{kl} = J_{ijKL}\sigma_{KL} + 2J_{ijK3}\sigma_{K3} + J_{ij33}\sigma_{33}$$

Запишем эту формулу в развернутой форме

$$\begin{aligned}\varepsilon_{IJ} &= J_{IJKL}\sigma_{KL} + J_{IJ33}\sigma_{33}, & \text{— симметрично,} & & O\left(\frac{h^0}{L^0}\right), \\ \varepsilon_{I3} &= 2J_{I3K3}\sigma_{K3}, & \text{— антисимметрично,} & & O\left(\frac{h^1}{L^1}\right), \\ \varepsilon_{33} &= J_{33KL}\sigma_{KL} + J_{3333}\sigma_{33}, & \text{— симметрично,} & & O\left(\frac{h^0}{L^0}\right),\end{aligned}$$

Для установления характера изменения истинных перемещений по толщине пластины воспользуемся соотношениями Коши

$$\varepsilon_{IJ} = \Delta_{IJKL}u_{K,L}, \quad \varepsilon_{I3} = \frac{1}{2}(u_{I,3} + u_{3,I}), \quad \varepsilon_{33} = u_{3,3}$$

Отсюда сразу устанавливаем, что \mathbf{u}_3 — антисимметрично по \mathbf{x}_3 , \mathbf{u}_I — симметрично по \mathbf{x}_3 . Поперечное перемещение $\mathbf{u}_3 \sim O(h/L)$, а $\mathbf{u}_I \sim O(h^0/L^0)$.

3.4 Уравнения обобщенного плосконапряженного состояния пластины.

Усредняя по толщине уравнения равновесия (3.1), учитывая при этом нулевые граничные условия на лицевых поверхностях и условия (3.10), получаем: два усреднённых уравнения равновесия

$$\bar{\sigma}_{IJ,J} + \bar{X}_I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0. \quad (3.12)$$

Граничные условия для напряжения на контуре Γ срединной поверхности Σ_0 получаем после усреднения граничных условий (3.2)

$$\bar{\sigma}_{IJ}n_J|_{\Gamma} = p_I^0(s), \quad (3.13)$$

где s — длина дуги контура Γ .

После усреднения трёхмерных уравнений теории упругости остались только два уравнения для средних напряжений $\bar{\sigma}_{IJ}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и два граничных условия на контуре плоской области. Кроме этого, $\bar{\sigma}_{I3} = 0$, $\sigma_{33} = 0$.

Вся ситуация вполне аналогична случаю чисто плоского напряженного состояния. Поэтому все формулы раздела (2.1) — "Чисто плоское напряженное состояние" переносятся без изменений и на случай "Обобщенное плоское напряженное состояние", только вместо σ_{IJ} , ε_{IJ} , u_I нужно везде поставить средние по толщине $\bar{\sigma}_{IJ}$, $\bar{\varepsilon}_{IJ}$, \bar{u}_I .

После того как решена плоская краевая задача для осреднённого напряженно деформированного состояния находим среднюю поперечную деформацию $\bar{\varepsilon}_{33}$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = -\frac{C_{33KL}}{C_{3333}} \bar{\varepsilon}_{KL} \quad (3.14)$$

В изотропном случае

$$\bar{\varepsilon}_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) \quad (3.15)$$

3.5 Уравнения совместности усреднённых деформаций.

При выводе уравнений совместности для усреднённых деформаций в срединной плоскости пластины поступаем точно также, как и в случае плоской деформации. Учитываются только $\bar{\varepsilon}_{IJ}(x_1, x_2)$. Из шести условий совместности остаётся только одно

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\bar{\varepsilon}_{IJ,KL} = \bar{\varepsilon}_{11,22} + \bar{\varepsilon}_{22,11} - 2\bar{\varepsilon}_{12,12} = 0 \quad (3.16)$$

3.6 Замечания о возможности восстановления истинного НДС по усреднённому НДС.

Характер изменения полевых величин $\bar{u}_i((x_1, x_2, x_3))$, $\bar{\varepsilon}_{ij}((x_1, x_2, x_3))$, $\bar{\sigma}_{ij}((x_1, x_2, x_3))$ по толщине пластины установлен в предыдущих разделах. Для установления более точных значений НДС нужно использовать какие либо гипотезы о поведении пластины при нагружении, либо о свойствах материала.

4 Постановка плоских задач теории упругости.

Вид уравнений всех плоских задач (плоская деформация, обобщенное плоское напряженное состояние) одинаков. Разница заключается в том, как выражаются коэффициенты в плоских определяющих соотношениях через истинные коэффициенты упругости (или же через истинные коэффициенты податливости) материала цилиндрическом теле (пластине). Кроме того, при обобщенном плоском напряженном состоянии все полевые величины являются средними по толщине пластины. В остальном математический аппарат одинаков и состоит он из:

Уравнений равновесия

$$\sigma_{IJ,J} + X_I(x_1, x_2) = 0. \quad (4.1)$$

Определяющих соотношений

$$\sigma_{IJ} = A_{IJKL}(x_1, x_2)\varepsilon_{KL}. \quad (4.2)$$

Соотношений Коши

$$\varepsilon_{IJ} = \Delta_{IJKL}u_{K,L} = \frac{1}{2}(u_{I,J} + u_{J,I}). \quad (4.3)$$

Граничных условий смешанного типа

$$u_I|_{\Gamma_u} = u_I^0, \quad \sigma_{IJ}n_J|_{\Gamma_p} = p_I^0, \quad \Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma. \quad (4.4)$$

Γ — либо контур поперечного сечения цилиндра, либо контур срединного сечения пластины (диска). Уравнения (4.1)-(4.4) составляют постановку смешанной краевой задачи плоской неоднородной анизотропной упругости. Они сводятся к системе двух уравнений для двух перемещений

$$[A_{IJKL}(x_1, x_2)u_{K,L}]_{,J} + X_I(x_1, x_2) = 0. \quad (4.5)$$

4.1 Плоская деформация и плоское напряжение.

Коэффициенты A_{IJKL} различаются для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния

$$A_{IJKL} = C_{IJKL}, \quad A_{IJKL}^{-1} = J_{IJKL} - \frac{J_{IJ33}J_{33KL}}{J_{3333}} \quad \text{— пл. деформация,}$$

$$A_{IJKL} = C_{IJKL} - \frac{C_{IJ33}C_{33KL}}{C_{3333}}, \quad A_{IJKL}^{-1} = J_{IJKL} \quad \text{— пл. напр. состояние.}$$

В изотропном случае, при плоской деформации

$$A_{IJKL} = \lambda \delta_{IJ} \delta_{KL} + 2\mu \Delta_{IJKL} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{E}{(1+\nu)} \Delta_{IJKL},$$

$$A_{IJKL}^{-1} = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{1}{2\mu} \Delta_{IJKL} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{1+\nu}{E} \Delta_{IJKL} \quad (4.6)$$

В изотропном случае, при плоском напряженном состоянии

$$A_{IJKL} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \delta_{IJ} \delta_{KL} + 2\mu \Delta_{IJKL} = \frac{E\nu(1-\nu)}{1+\nu} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{E}{1+\nu} \Delta_{IJKL}$$

$$A_{IJKL}^{-1} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{1}{2\mu} \Delta_{IJKL} = -\frac{\nu}{E} \delta_{IJ} \delta_{KL} + \frac{1+\nu}{E} \Delta_{IJKL} \quad (4.7)$$

4.2 Получение решения задачи для пластины из решения задачи о плоской деформации.

Рассматриваем изотропный материал. Пусть для призматического тела из этого материала решена задача о плоской деформации. То есть, найдены перемещения $u_I(x, \lambda, \mu)$, деформации $\varepsilon_{IJ}(x, \lambda, \mu)$ и $\sigma_{IJ}(x, \lambda, \mu)$.

Вопрос: как из этого решения получить решение такой же задачи (в математическом плане) для диска?

Ответ: нужно в выражениях для перемещений, деформаций и напряжений заменить λ на $2\lambda\mu/(2\mu + \lambda)$.

4.3 Получение решения задачи о плоской деформации из решения задачи для пластины. Решена задача о плоском напряженном состоянии для диска из изотропного материала. То есть найдены перемещения $u_I(x, \lambda, \mu)$, деформации $\varepsilon_{IJ}(x, \lambda, \mu)$ и $\sigma_{IJ}(x, \lambda, \mu)$.

Вопрос: как из этого решения получить решение такой же задачи (в математическом плане) для цилиндрического тела?

Ответ: нужно в выражениях для перемещений, деформаций и напряжений заменить λ на $2\lambda\mu/(2\mu - \lambda)$.

Список литературы

- [1] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Наука, Москва, 1966.
- [2] Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва, 1977.
- [3] Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел*. МГУ, Москва, 1976.
- [4] Новацкий В. *Теория упругости*. Мир, Москва, 1975.