МДТТ ЛЕКЦИЯ №8 (07.04.2020)

Плоская задача теории упругости. Часть 2.

Профессор В.И. Горбачев. Кафедра механики композитов.

Во второй части лекции о плоских задачах теории упругости рассматриваются задачи для тел из однородных изотропных материалов. Универсальным математическим аппаратом для решения плоских задач является метод теории функций комплексного переменного.

1 Постановка плоских задач.

Рассмотрим уравнения плоской задачи

$$\sigma_{IJ,J} + X_I(x_1, x_2) = 0\,, \quad \sigma_{IJ} = A_{IJKL}\varepsilon_{IJ}\,, \quad \varepsilon_{IJ} = \Delta_{IJKL}u_{K,L} = \frac{1}{2}\big(u_{I,J} + u_{J,I}\big) \qquad (1.1)$$

где $A_{IJKL} = \lambda\delta_{IJ}\delta_{KL} + 2\mu\Delta_{IJKL}$.

Граничные условия смешанного типа

$$u_I\big|_{\Gamma_u} = u_I^0\,, \qquad \sigma_{IJ}n_J\big|_{\Gamma_p} = p_I^0,\,, \quad \Gamma_u \cup \Gamma_u = \Gamma. \tag{1.2}$$

$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ — контур плоской области. После решения задачи и определения напряжений σ_{IJ} вычисляются продольное напряжение

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\big(\sigma_{11}+\sigma_{22}\big) = \nu\big(\sigma_{11}+\sigma_{22}\big) \tag{1.3}$$

Если же рассматривается задача об обобщенном напряженном состоянии, то в аналитическом решении задачи (1.1) — (1.2) необходимо прежде всего провести замену коэффициента

$$\lambda \quad \rightarrow \quad \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$$

Получившиеся при такой замене перемещения $u_I(x_1,x_2)$, деформации $\varepsilon_{IJ}(x_1,x_2)$ и напряжения $\sigma_{IJ}(x_1,x_2)$, представляют собой средние по толщине пластины. Восстановить по ним истинное распределение по толщине перечисленных величин не представляется возможным.

В пластине, кроме средних деформаций $\varepsilon_{IJ}(x_1,x_2)$, возникает усреднённая по толщине поперечная деформация

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\big(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\big) = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\big(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\big)$$

1.1 Задача в перемещениях и задача в напряжениях.

Плоская задача ставится либо в перемещениях, либо в напряжениях. Если на контуре заданы условия смешанного типа (**смешанная краевая задача**), либо заданы только перемещения (**первая краевая задача**), тогда задача решается в перемещениях. Она состоит из уравнений равновесия в перемещениях и граничных условий в перемещениях

$$\big(A_{IJKL}u_{K,L}\big)_{,J} + X_I = 0\,, \qquad u_I\big|_{\Gamma_u} = u_I^0\,, \qquad A_{IJKL}u_{K,L}n_J\big|_{\Gamma_p} = p_I^0 \tag{1.4}$$

В случае, когда задача решается в перемещениях, уравнения совместности удовлетворяются тождественно.

Пусть на всём граничном контуре задана распределённая нагрузка (**вторая краевая задача**). Вторую краевую задачу можно решать и в перемещениях, однако очень часто она ставится в напряжениях, то есть, рассматриваются уравнения равновесия и условия совместности деформаций, записанные в напряжениях. Постановка задачи в напряжениях записывается в виде следующей группы уравнений:

$$\begin{gathered}\sigma_{IJ,J} + X_I(x_1,x_2) = 0\,, \qquad \varepsilon_{IJ} = B_{IJMN}\sigma_{MN}\,, \qquad \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\varepsilon_{IJ,KL} = 0\,;\\ \sigma_{IJ,J} + X_I = 0\,, \qquad \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\big(B_{IJMN}\sigma_{MN}\big)_{KL} = 0\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $B_{IJKL} = A^{-1}_{IJKL}$. В изотропном случае

$$\begin{gathered}B_{IJKL} = \lambda^*\delta_{IJ}\delta_{KL} + 2\mu^*\Delta_{IJKL}\,,\\ \lambda^* = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\,, \quad \mu^* = \frac{1}{4\mu} = \frac{1+\nu}{2E} \quad \text{— при плоской деф.}\,,\\ \lambda^* = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu} = -\frac{\nu}{E}\,, \quad \mu^* = \frac{1}{4\mu} = \frac{1+\nu}{2E} \quad \text{— при пл. напр. состоянии}\end{gathered} \tag{1.6}$$

1.2 Функция напряжений Эри во второй краевой задаче.

Пусть на всем контуре Γ задан вектор распределённой нагрузки, то есть $\Gamma_u = \emptyset$, и пусть вектор нагрузки потенциален. Это означает, что существует такая скалярная функция $\varphi(x_1, x_2)$, называемая потенциалом, с помощью которой компоненты вектора "объёмной" нагрузки выражаются по формуле $X_I = -\varphi_{,I}$.

Введём функцию напряжений Эри[1] $F(x_1, x_2)$, такую что

$$\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}F_{,KL} + \varphi\delta_{IJ} \tag{1.7}$$

Подставим напряжения (1.7) в уравнения (1.5) второй краевой задачи в напряжениях. Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, а из условий совместности получаем уравнение для функции напряжений

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}\Big[B_{IJMN}\big(\epsilon_{MP}\epsilon_{NQ}F_{,PQ} + \varphi\delta_{MN}\big)\Big]_{,KL} = 0 \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) записано для анизотропного и неоднородного случая. Если материал диска изотропный и однородный, тогда коэффициенты $B_{IJKL} = const.$ и определяются по формуле (1.6). При этом, уравнения (1.8) преобразуются к виду:

$$\Delta^2 F + 2\frac{2\lambda^* + \mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}\Delta\varphi = 0\,, \tag{1.9}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — плоский оператор Лапласа. При нулевых объёмных нагрузках $\varphi \equiv 0$ и уравнение принимает вид

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0. \tag{1.10}$$

То есть, функция напряжений F при отсутствии объёмных нагрузок является бигармонической функцией.

1.3 Вывод граничных условий для функции напряжений.

Займемся выводом граничных условий. Пусть $x_1(s),\ x_2(s)$ — параметрическое уравнение контура, где s — длина дуги контура, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки контура в положительном направлении. **Положительным на контуре замкнутой области считается такое направление, при движении в котором область всегда остаётся слева.**

В этом случае компоненты положительного единичного вектора касательной и положительного вектора внешней единичной нормали и к контуру области определяются по формулам [2, стр. 75]

$$\tau_J = \frac{dx_J}{ds}\,, \qquad n_J = \epsilon_{JK}\frac{dx_K}{ds}\,, \quad \Rightarrow \quad \tau_J = -\epsilon_{JK}n_K \tag{1.11}$$

Воспользуемся известной [3] формулой $\epsilon_{JK}\epsilon_{JL} = \delta_{KL}$ и вычислим

$$\sigma_{IJ}n_J = \big(\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}F_{,KL} + \varphi\delta_{IJ}\big)\epsilon_{JM}\frac{dx_M}{ds} = \epsilon_{IK}\delta_{ML}F_{,KL}\frac{dx_M}{ds} + \varphi\delta_{IM}\frac{dx_M}{ds} =$$

$$= \epsilon_{IK}\frac{dF_{,K}}{ds} + \varphi n_I = p_I^0(s)\,, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{IK}\frac{dF_{,K}}{ds} = \tilde{p}_I^0\,, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{IK}F_{,K} = \int\limits_0^s \tilde{p}_I^0(\eta)d\eta$$

[1]функцию напряжений впервые ввёл и использовал английский математик Джордж Биддэлл Эйри в 1862 году [1, стр. 272-274]

Итак, из этих простых преобразований получаем следующее выражение на контуре области:

$$F_{,K}\Big|_{\Gamma} = \epsilon_{IK} \int\limits_0^s \tilde{p}_I^0(\eta) d\eta. \tag{1.12}$$

Умножая (1.12) на n_K и учитывая, что $F_{,K} n_K = \frac{dF}{dn}$, получаем первое граничное условие для функции напряжений

$$\boldsymbol{\frac{dF}{dn}\Big|_{\Gamma} = F_{,K} n_K\Big|_{\Gamma} = \epsilon_{IK} n_K \int\limits_0^s \tilde{p}_I^0(\eta) d\eta\,, \qquad \tilde{p}_I^0(s) \equiv p_I^0(s) - \varphi(s) n_I(s)} \tag{1.13}$$

Ещё одно условие получим умножив (1.12) на $\tau_K = dx_K/ds$

$$\frac{dF}{d\tau}\Big|_{\Gamma} = F_{,K}\tau_K\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial x_K}\frac{dx_K}{ds} = \frac{dF}{ds} = \epsilon_{IK}\tau_K(s) \int\limits_0^s \tilde{p}_I^0(\eta) d\eta. \tag{1.14}$$

Отсюда получаем:

$$\boldsymbol{F\Big|_{\Gamma} = \int\limits_0^s \epsilon_{IK} \Phi_I(s_1) \tau_K(s_1) ds_1 = \vec{e}_3 \cdot \int\limits_0^s \vec{\Phi}(s_1) \times d\vec{s}_1\,,} \tag{1.15}$$

где

$$\Phi_I(s_1) \equiv \int\limits_0^{s_1} \tilde{p}_I^0(\eta) d\eta\,, \quad \vec{\Phi}(s_1) = \Phi_I(s_1)\vec{e}_I\,, \quad d\vec{s}_1 = \vec{\tau}(s_1) ds_1$$

1.4 Физический смысл функции напряжений.

Граничное условие (1.15) позволяет установить физический смысл функции напряжений.

Для этого рассмотрим его правую часть и распишем подинтегральное выражение

$$dM(s_1) = \epsilon_{IK}\Phi_I(s_1)\tau_K(s_1)ds_1 =$$
$$= \Phi_1(s_1)\tau_2(s_1)ds_1 - \Phi_2(s_1)\tau_1(s_1)ds_1.$$

Здесь $dM(s_1)$ — величина момента сил $\Phi_1(s_1)$ и $\Phi_2(s_1)$, приложенных в точке s_1 граничного контура Γ, относительно конца элементарного вектора $\vec{\tau}(s_1)ds_1$ дуги контура.

В таком случае, интеграл в формуле (1.15) представляет собой момент силы $\vec{\Phi}$, распределённой вдоль дуги контура, относительно текущей точки s на контуре срединной поверхности (рис. 1).

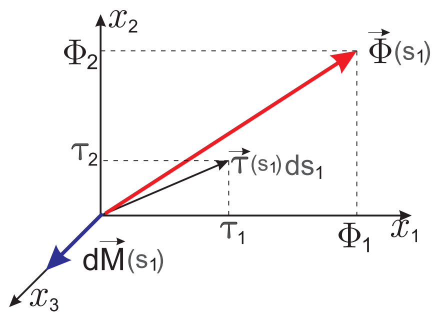

Рис. 1: *К вопросу о физическом смысле функции напряжений.*

$$\boldsymbol{\vec{M} = \vec{e}_3 M\,, \qquad M = \int\limits_0^s \epsilon_{IK}\left(\int\limits_0^{s_1} \tilde{p}_I^0(\eta) d\eta\right)\tau_K(s_1) ds_1 = F\Big|_{\Gamma}} \tag{1.16}$$

1.5 Теорема Мориса-Леви.

В случае однородного изотропного материала диска и при отсутствии объёмных нагрузок функция напряжений является бигармонической функцией, удовлетворяющей граничным условиям (1.15) и (1.13), то есть

$$\Delta^2 F = 0\,, \qquad F\Big|_\Gamma = \varphi_0(s)\,, \qquad \frac{dF}{dn}\Big|_\Gamma = \varphi_1(s)\,,$$
$$\varphi_0(s) = \int\limits_0^s \epsilon_{IK}\Bigg[\int\limits_0^{s_1} \tilde{p}_I^0(\eta)d\eta\Bigg]\tau_K(s_1)ds_1\,, \qquad \varphi_1(s) = \epsilon_{IK}n_K\int\limits_0^s \tilde{p}_I^0(\eta)d\eta \tag{1.17}$$

В уравнение и в граничные условия (1.17) не входят константы материала. Следовательно, решение задачи (1.17) не зависит от материальных констант. Поэтому и напряжения $\boldsymbol{\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}F_{,KL}}$ также не зависят от материальных констант. Этот факт и есть содержание теоремы Мориса-Леви.

Деформации и перемещения уже будут зависеть от материала, из которого сделан диск. На теореме Мориса-Леви построены многие экспериментальные методы, которые проводятся на удобных для этого материалах, например на оптически активных материалах. Результаты экспериментов (напряжения) переносятся на изделия из других материалов.

2 Применение теории функций комплексного переменного для решения плоской задачи.

Рассматривается случай однородного и изотропного материала. Объемные нагрузки отсутствуют $X_I = 0$.

2.1 Определение деформаций по функции напряжений.

Из прямого закона Гука получаем

$$\sigma_{IJ} = \epsilon_{IK}\epsilon_{JL}F_{,KL} = \lambda\varepsilon\delta_{IJ} + 2\mu\varepsilon_{IJ}\,, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$. Положим в формуле (2.1) $J = I$

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{IL}F_{,KL} = F_{,KK} = \lambda\varepsilon\delta_{II} + 2\mu\varepsilon_{II} = 2(\lambda+\mu)\varepsilon\,,$$

следовательно

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{F_{,11} + F_{,22}}{2(\lambda+\mu)} = \frac{\Delta F}{2(\lambda+\mu)}} \tag{2.2}$$

Подставим это выражение в закон Гука (2.1)

$$\epsilon_{IK}\epsilon_{JL}F_{,KL} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta F\delta_{IJ} + 2\mu\varepsilon_{IJ}\,, \tag{2.3}$$

Отсюда

$$2\mu\varepsilon_{11} = F_{,22} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta F = -F_{,11} + \Delta F - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta F = -F_{,11} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta F\,,$$
$$2\mu\varepsilon_{22} = F_{,11} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta F = -F_{,22} + \Delta F - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta F = -F_{,22} + \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta F\,,$$
$$2\mu\varepsilon_{12} = -F_{,12}\,. \tag{2.4}$$

2.2 Определение перемещений по функции напряжений.

Учитывая, что $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$, $\varepsilon_{22} = u_{1,1}$, из (2.4) получаем

$$2\mu u_{1,1} = -F_{,11} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta F\,, \quad 2\mu u_{2,2} = -F_{,22} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)}\Delta F \tag{2.5}$$

Отсюда находим перемещения

$$\boldsymbol{2\mu u_1 = -F_{,1} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} \int \Delta F dx_1\,,} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{2\mu u_2 = -F_{,2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)} \int \Delta F dx_2.} \tag{2.7}$$

Произвольные функции интегрирования $f_1(x_2)$ и $f_2(x_1)$ в (2.6) и (2.7) не учитываются, поскольку их можно включить в неизвестные величины $F_{,1}$ и $F_{,2}$.

2.3 Введение комплексных переменных. Теорема Гурса о представлении бигармонической функции через две функции комплексной переменной.

Далее вводим комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$, i — комплексная единица. **По теореме Гурса всякую действительную бигармоническую функцию двух переменных можно представить через две функции комплесной переменной по формуле [4, стр. 108]**

$$\boxed{\boldsymbol{F = Re\Big[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \overline{\chi(z)}\Big]}}\,, \tag{2.8}$$

где Re обозначает действительную часть, а черта над символом функции — комплексно сопряженную функцию.

2.4 Правила дифференцирования и интегрирования функций комплексной переменной.

Воспользуемся следующим очевидным правилом дифференцирования функции комплексной переменной по декартовым координатам x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} f_{,1}(z) &= \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x_1} = f'(z)\,, \qquad \overline{f(z)}_{,1} = \overline{f'(z)}\,, \\ f_{,2}(z) &= \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x_2} = if'(z)\,, \qquad \overline{f(z)}_{,2} = -i\,\overline{f'(z)}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отсюда вытекают соответствующие правила интегрирования производных функций комплексной переменной по координатам x_1 и x_2

$$\begin{aligned} \int f'(z)dx_1 &= \int f_{,1}(z)dx_1 = f(z)\,, \qquad \int \overline{f'(z)}dx_1 = \int \overline{f_{,1}(z)}dx_1 = \overline{f(z)}\,, \\ \int f'(z)dx_2 &= -i\int f_{,2}(z)dx_2 = -if(z)\,, \qquad \int \overline{f'(z)}dx_2 = i\int \overline{f_{,2}(z)}dx_2 = i\,\overline{f(z)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Используя эти правила, получаем:

$$F_{,1} = \frac{1}{2}\big(\varphi + \bar{z}\varphi' + \chi' + \bar{\varphi} + z\overline{\varphi'} + \overline{\chi'}\,\big)\,,$$

$$F_{,2}=\frac{i}{2}\big(-\varphi+\bar z\varphi'+\chi'+\bar\varphi-z\overline{\varphi'}-\overline{\chi'}\,\big)\,,$$
$$F_{,11}=\frac{1}{2}\big(2\varphi'+\bar z\varphi''+\chi''+2\overline{\varphi'}+z\overline{\varphi''}+\overline{\chi''}\,\big)=\sigma_{22}\,, \tag{2.11}$$
$$F_{,22}=\frac{1}{2}\big(2\varphi'-\bar z\varphi''-\chi''+2\overline{\varphi'}-z\overline{\varphi''}-\overline{\chi''}\,\big)=\sigma_{11}\,,$$
$$F_{,12}=\frac{i}{2}\big(\bar z\varphi''-z\overline{\varphi''}+\chi''-\overline{\chi''}\,\big)=-\sigma_{12}$$

Отсюда и из (2.10) следуют нужные нам промежуточные формулы

$$\Delta F=F_{,11}+F_{,22}=2\big(\varphi'+\overline{\varphi'}\,\big)=4Re\,\varphi'(z)\,,$$
$$\int\Delta F dx_1=2\int\big(\varphi'+\overline{\varphi'}\,\big)dx_1=2\big(\varphi+\bar\varphi\big)\,, \tag{2.12}$$
$$\int\Delta F dx_2=2\int\big(\varphi'+\overline{\varphi'}\,\big)dx_2=2i\big(-\varphi+\bar\varphi\big)$$

2.5 Комплексная функция перемещений. Представление через комплексные потенциалы.

Формулы (2.9)–(2.12) нужны нам для того, чтобы записать представление перемещений u_1 и u_2 через две функции комплексных переменных $\varphi(z)$ и $\chi'(z)$. Используем для этого выражения (2.6) и (2.7):

$$F_{,1}+iF_{,2}=\varphi+z\overline{\varphi'}+\overline{\chi'}\,,\qquad \int\Delta F dx_1+i\int\Delta F dx_2=4\varphi\,,$$
$$-\big(F_{,1}+iF_{,2}\big)+\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}\left(\int\Delta F dx_1+i\int\Delta F dx_2\right)=-\varphi-z\overline{\varphi'}-\overline{\chi'}+\frac{2\lambda+4\mu}{\lambda+\mu}\,\varphi.$$

В итоге получаем:

$$\boxed{\boldsymbol{2\mu(u_1+iu_2)=\varkappa\varphi-z\overline{\varphi'}-\bar\psi}}\,,\qquad \boldsymbol{\psi(z)=\chi'(z)} \tag{2.13}$$

где

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\nu\,,\qquad \text{— плоская деформация.}$$
$$\varkappa=\frac{5\lambda+6\mu}{3\lambda+2\mu}=\frac{3-\nu}{1+\nu}\,,\qquad \text{— плоское напряженное состояние.}$$

2.6 Представление напряжений через комплексные потенциалы.

Из формул (2.11) получаем нужные нам выражения

$$\sigma_{11}=\frac{1}{2}\big(2\varphi'-\bar z\varphi''-\chi''+2\overline{\varphi'}-z\overline{\varphi''}-\overline{\chi''}\,\big)\,,$$
$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\big(2\varphi'+\bar z\varphi''+\chi''+2\overline{\varphi'}+z\overline{\varphi''}+\overline{\chi''}\,\big)\,, \tag{2.14}$$
$$\sigma_{12}=-\frac{i}{2}\big(\bar z\varphi''-z\overline{\varphi''}+\chi''-\overline{\chi''}\,\big)$$

Однако эти формулы довольно громоздкие и неудобны при конкретных применениях. Более удобны две комбинации из этих трёх напряжений [4, стр. 111], а именно $\sigma_{22}+\sigma_{11}$ и $\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma_{22}+\sigma_{11}=2\big(\varphi'+\overline{\varphi'}\,\big)\,,\qquad \sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2\big(\bar z\varphi''+\overline{\psi'}\,\big)}} \tag{2.15}$$

2.7 Представление граничных условий.

Воспользуемся формулами (1.12) и запишем граничные условия второй краевой задачи при нулевых объёмных нагрузках

$$F_{,I}\Big|_{\Gamma} = \epsilon_{KI}\int\limits_0^s p_K^0(\eta)d\eta = \epsilon_{KI}\Phi_K(s)\,, \qquad \Phi_K(s) \equiv \int\limits_0^s p_K^0(\eta)d\eta\,, \tag{2.16}$$
$$F_{,1}\Big|_{\Gamma} = -\Phi_2(s)\,, \qquad F_{,2}\Big|_{\Gamma} = \Phi_1(s)\,,$$

Отсюда

$$\Phi_1(s) + i\Phi_2(s) = -i\big(F_{,1} + iF_{,2}\big) = -i\big(\varphi + z\overline{\varphi'} + \bar{\psi}\ \big)$$

Окончательно, граничное условие принимает вид:

$$\boxed{\boldsymbol{\left(\varphi + z\overline{\varphi'} + \bar{\psi}\ \right)\Big|_{\Gamma} = i\big(\Phi_1(s) + i\Phi_2(s)\big) = i\int\limits_0^s \left[p_1^0(\eta) + ip_2^0(\eta)\right]d\eta}} \tag{2.17}$$

Ещё одно условие основано на физическом смысле функции напряжений (1.16) и на представлении функции напряжений через две функции комплексной переменной (1.17). Из этих формул получаем:

$$\boxed{\boldsymbol{F\Big|_{\Gamma} = Re\Big[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\Big]\Big|_{\Gamma} = \int\limits_0^s \epsilon_{IK}\left(\int\limits_0^{s_1}\tilde{p}_I^0(\eta)d\eta\right)\tau_K(s_1)ds_1 = M}} \tag{2.18}$$

2.8 Полярные координаты.

Во многих случаях удобно использовать полярные координаты вместо декартовых. Расположим начало полярных координат в начале декартовых координат, а ось Ox_1 примем за полярную ось, тогда

$$x_1 = r\cos\vartheta\,, \quad x_2 = r\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{z = x_1 + ix_2 = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{i\vartheta}}}\,, \tag{2.19}$$

где r и ϑ — полярные координаты точки с декартовыми координатами (x_1, x_2).

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \qquad \vartheta = \arctan\frac{x_2}{x_1} \tag{2.20}$$

Пусть u_r и u_ϑ — компоненты вектора перемещений в полярных координатах, тогда

$$u_1 = u_r\cos\vartheta - u_\vartheta\sin\vartheta\,, \qquad u_2 = u_r\sin\vartheta + u_\vartheta\cos\vartheta$$

$$\boldsymbol{u_1 + iu_2 = (u_r + iu_\vartheta)e^{i\vartheta} \quad \Rightarrow \quad u_r + iu_\vartheta = (u_1 + iu_2)e^{-i\vartheta}}$$
$$\boxed{\boldsymbol{u_r + iu_\vartheta = \frac{1}{2\mu}\big(\varkappa\varphi - z\overline{\varphi'} - \overline{\psi}\big)e^{-i\vartheta}}} \tag{2.21}$$

Формулы для напряжений в полярных координатах имеют вид [4, стр. 133]:

$$\boldsymbol{\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta} = 4Re\,\varphi'(z) = 2\Big[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\Big]\,,} \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\vartheta} = 2\Big[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\Big]e^{2i\vartheta}\,,} \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{rr} - i\sigma_{r\vartheta} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - \Big[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\Big]e^{2i\vartheta}.} \tag{2.24}$$

2.9 Представление комплексных потенциалов в виде рядов.

Для решения плоской задачи теории однородной изотропной упругости достаточно знать два комплексных потенциала $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Через них определяются перемещения и напряжения по формулам (2.13), (2.21) и (2.15), (2.22) - (2.24).

В случае конечной многосвязной области, ограниченной внешним контуром Γ_0 и одним, или несколькими внутренними замкнутыми контурами, комплексные потенциалы представляются в виде [4, стр. 122], [5, стр. 132]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\big(X_k + iY_k\big)\ln(z - z_k) + \varphi^*(z)\,, \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}\big(X_k - iY_k\big)\ln(z - z_k) + \psi^*(z)\,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где z_k — произвольная точка внутри замкнутого k-го контура Γ_k; X_k и Y_k — компоненты главного вектора сил, распределённых на контуре Γ_k; $\ln(z - z_k)$ — натуральный логарифм комплексного числа[2] [6, стр. 85], [7, стр. 85]; $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ — голоморфные (аналитические) функции в области Σ, ограниченной внешним контуром Γ_0. Это означает, что они раскладываются в ряды Лорана в Σ

$$\varphi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,, \qquad \psi^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n\,, \tag{2.26}$$

где a_n и b_n — комплексные константы.

Когда область бесконечна и содержит бесконечную точку комплексные потенциалы имеют вид [4, стр. 124], [8, стр. 11]:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + K_\varphi z + \varphi^{**}(z)\,, \\ \psi(z) &= \frac{\varkappa\big(X - iY\big)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z + K_\psi z + \psi^{**}(z). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь $X = \sum\limits_{k=1}^{m} X_k$ и $Y = \sum\limits_{k=1}^{m} Y_k$ — компоненты результирующего вектора нагрузок, действующих на всех контурах Γ_k, $(k = 1, \ldots, m)$; K_φ и K_ψ — комплексные константы; $\varphi^{**}(z)$ и $\psi^{**}(z)$ — голоморфные функции, **включая и бесконечность**, то есть

$$\varphi^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}\,, \qquad \psi^{**}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}\,, \tag{2.28}$$

где a_n и b_n — комплексные константы.

[2] $\ln z = \ln|z| + i\,\arg z$

3 Примеры решения задач.

3.1 Задача Ламе о трубе под давлением.

Под задачей Ламе понимается задача о бесконечной цилиндрической трубе внутреннего радиуса a и внешнего b из однородного изотропного материала под действием внутреннего давления P_a и внешнего P_b.

3.1.1 Решение задачи Ламе в перемещениях.

В силу радиальной симметрии задачи материальные точки будут смещаться только в радиальном направлении. То есть, в полярных координатах $u_r = u_r(r)$, $u_\vartheta = 0$. Из компонент тензора деформаций отличны от нуля ε_{rr} и $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$, причем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \equiv u_r', \qquad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r}{r} \tag{3.1}$$

Найдём напряжения. Для этого воспользуемся законом Гука, который одинаков (инвариантен) в любой системе координат

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + 2\mu\varepsilon_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = (\lambda + 2\mu)u_r' + \lambda\frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + 2\mu\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda u_r' \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из двух уравнений равновесия остаётся одно [9, стр. 83]

$$\sigma_{rr}' + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0 \tag{3.3}$$

Подставив сюда выражения (3.2), получаем

$$(\lambda + 2\mu)\left[u_r'' + \left(\frac{u_r}{r}\right)'\right] = (\lambda + 2\mu)\left[u_r' + \frac{u_r}{r}\right]' = 0 \quad \Rightarrow \quad u_r = K_1 r + \frac{K_2}{r}, \tag{3.4}$$

где K_1 и K_2 — константы интегрирования, которые найдём из граничных условий на внутренней и наружной поверхности трубы

$$\sigma_{rr}(a) = -P_a, \qquad \sigma_{rr}(b) = -P_b. \tag{3.5}$$

Для этого вначале найдём выражения для напряжений, подставив перемещения (3.4) в формулы (3.2)

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)K_1 - 2\mu\frac{K_2}{r^2}, \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2(\lambda + \mu)K_1 + 2\mu\frac{K_2}{r^2} \tag{3.6}$$

Из граничных условий (3.5) получаем систему уравнения для определения констант

$$\begin{cases} 2(\lambda + \mu)K_1 - 2\mu\frac{K_2}{a^2} = -P_a \\ 2(\lambda + \mu)K_1 - 2\mu\frac{K_2}{b^2} = -P_b \end{cases} \tag{3.7}$$

Отсюда находим:

$$K_1 = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}, \qquad K_2 = -\frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{2\mu(b^2 - a^2)} \tag{3.8}$$

Окончательно для напряжений получаем следующие выражения

$$\boldsymbol{\sigma_{rr} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}},$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}} \qquad (3.9)$$

По формуле (3.4) находим радиальное перемещение

$$\boxed{\boldsymbol{u_r = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)} r - \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{2\mu(b^2 - a^2)} \frac{1}{r}}} \qquad (3.10)$$

3.1.2 Решение задачи Ламе с помощью функции напряжений Эри.

Задача в напряжениях ставится и решается в том случае, когда на всей поверхности тела задана нагрузка. В этом случае всё сводится к нахождению функции напряжений. Применительно к задаче Ламе, в отсутствии объёмных нагрузок, функция напряжений является бигармонической функцией, зависящей только от r — расстояния от полярного центра. Уравнение для функции напряжений (уравнение совместности) в этом случае становится обыкновенным дифференциальным уравнением четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Оно приводится во многих учебниках по теории упругости, например в книге [9, стр. 85]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr}\right) = \frac{d^4F}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3F}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dF}{dr} = 0 \qquad (3.11)$$

Общее решение имеет вид:

$$F(r) = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \qquad (3.12)$$

Отсюда находим напряжения

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = \frac{A}{r^2} + B\big(1 + 2\ln r\big) + 2C\,,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{d^2F}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B\big(3 + 2\ln r\big) + 2C. \qquad (3.13)$$

Константу B следует положить равной нулю, чтобы избавиться от бесконечности при $r \to 0$. В итоге

$$\sigma_{rr} = 2C + \frac{A}{r^2}\,, \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2C - \frac{A}{r^2} \qquad (3.14)$$

Из граничных условий (3.5) находим константы A и C

$$A = \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2}\,, \qquad C = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b)}{2(b^2 - a^2)}$$

После этого находим напряжения

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}\,, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2}. \qquad (3.15)$$

Эти выражения в точности совпадают с напряжениями (3.9). Чтобы найти перемещения u_r нужно сначала найти кольцевые деформации $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$. Для этого воспользуемся формулами (1.6) при плоской деформации

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = -\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}4C + \frac{1}{2\mu}\Big(-\frac{A}{r^2} + 2C\Big) = \frac{C}{\lambda+\mu} - \frac{A}{2\mu}\frac{1}{r^2}$$
$$= \frac{a^2P_a - b^2P_b)}{2(\lambda+\mu)(b^2-a^2)} - \frac{a^2b^2(P_b-P_a)}{2\mu(b^2-a^2)}\frac{1}{r^2}$$

Отсюда получаем формулу для радиальных перемещений

$$\boxed{\boldsymbol{u_r = r\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{a^2P_a - b^2P_b)}{2(\lambda+\mu)(b^2-a^2)}\,r - \frac{a^2b^2(P_b-P_a)}{2\mu(b^2-a^2)}\frac{1}{r}}} \tag{3.16}$$

3.1.3 Решение задачи Ламе методом ТФКП.

На внутреннем и внешнем контурах результирующие векторы сил равны нулю. Отсюда и из формул (2.25) следует, что $\varphi = \varphi^*$, $\psi = \psi^*$ являются аналитическими функциями. **Аналитическими будут также и функции $\boldsymbol{\Phi(z) = \varphi'(z)}$ и $\boldsymbol{\Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)}$**, то есть

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{in\vartheta}\,, \qquad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n r^n e^{in\vartheta} \tag{3.17}$$

Из формулы (2.24) находим

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} - i\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \Big[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\Big]e^{2i\vartheta} = \\ = a_0 + \bar{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n r^n + \bar{a}_n r^{-n}\Big)e^{in\vartheta} - \sum_{-\infty}^{\infty} n a_n r^n e^{in\vartheta} - \sum_{-\infty}^{\infty} b_n r^n e^{i(n+2)\vartheta}\end{gathered} \tag{3.18}$$

Учтём теперь, что $\sigma_{r\vartheta} \equiv 0$, а σ_{rr} действительная функция, зависящая только от r. Тогда в формуле (3.18) нужно положить $a_n = 0$ ($|n| \geqslant 1$), $b_0 = 0$, $b_{\pm1} = 0$, $b_2 = 0$, $b_n = 0$ ($|n| \geqslant 3$).

Остаются только константы a_0 и b_{-2}, причём обе константы действительные. В итоге формула (3.18) для радиального напряжения приобретает вид

$$\sigma_{rr} = 2a_0 - \frac{b_{-2}}{r^2} \tag{3.19}$$

Константы a_0 и b_{-2} найдём из граничных условий

$$\sigma_{rr}(a) = -P_a\,, \quad \sigma_{rr}(b) = -P_b \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{1}{2}\frac{a^2P_a - b^2P_b}{b^2-a^2}\,, \quad b_{-2} = -\frac{a^2b^2\big(P_b - P_a\big)}{b^2-a^2}. \tag{3.20}$$

Итак, формулы (3.17) для потенциалов и формула (3.18) для радиального напряжения приобретают вид:

$$\Phi(z) = a_0 = \frac{1}{2}\frac{a^2P_a - b^2P_b}{b^2-a^2}\,, \qquad \Psi(z) = \frac{b_{-2}}{z^2} = -\frac{a^2b^2\big(P_b-P_a\big)}{b^2-a^2}\frac{1}{z^2}\,, \tag{3.21}$$

$$
\boxed{\boldsymbol{\sigma_{rr} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 \big(P_b - P_a\big)}{b^2 - a^2}\,\frac{1}{r^2}}}
\tag{3.22}
$$

Кольцевое напряжение найдем из формулы (2.22)

$$
\sigma_{\vartheta\vartheta} = -\sigma_{rr} + 2\Big[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\Big] = -2a_0 + \frac{b_{-2}}{r^2} + 4a_0 = 2a_0 + \frac{b_{-2}}{r^2} \;\Rightarrow
$$

$$
\boxed{\boldsymbol{\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 \big(P_b - P_a\big)}{b^2 - a^2}\,\frac{1}{r^2}}}
\tag{3.23}
$$

Чтобы по формуле (2.21) найти перемещения нужны потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Для этого проинтегрируем выражения (3.21)

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \int \Phi(z)dz + C = a_0 z + C = a_0 r e^{i\vartheta} + C\,,\\
\psi(z) &= \int \Psi(z)dz + C_1 = -\frac{b_{-2}}{z} + C_1 = -\frac{b_{-2}}{r}e^{i\vartheta} + C_1\,,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

где C и C_1 — комплексные константы. Найдём теперь перемещения

$$
u_r + iu_\vartheta = \frac{1}{2\mu}\big(\varkappa\varphi - z\overline{\Phi} - \overline{\psi}\big)e^{-i\vartheta} = \frac{1}{2\mu}\Big[\varkappa\big(a_0 z + C\big) - a_0 z + \frac{b_{-2}}{\bar{z}} - \bar{C}_1\Big]e^{-i\vartheta} =
$$

$$
= \frac{1}{2\mu}\Big[\varkappa\big(a_0 r e^{i\vartheta} + C\big) - a_0 r e^{i\vartheta} + \frac{b_{-2}}{r}e^{i\vartheta} - \bar{C}_1\Big]e^{-i\vartheta} = \frac{1}{2\mu}\Big[(\varkappa - 1)a_0 r + \frac{b_{-2}}{r} + \varkappa C - \bar{C}_1 e^{-i\vartheta}\Big]
$$

Положив здесь $C = 0$ и $C_1 = 0$, получим окончательно выражения для перемещений $u_\vartheta = 0$ и

$$
u_r = \frac{1}{2\mu}\Big[(\varkappa - 1)a_0 r - \frac{b_{-2}}{r}\Big] = \frac{\varkappa - 1}{4\mu}\,\frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2}\,r - \frac{1}{2\mu}\,\frac{a^2 b^2 \big(P_b - P_a\big)}{b^2 - a^2}\,\frac{1}{r}
$$

Учитывая, что при плоской деформации $\varkappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$ и $\varkappa - 1 = 2\mu/(\lambda + \mu)$, получаем окончательно

$$
\boxed{\boldsymbol{u_r = \frac{a^2 P_a - b^2 P_b)}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}\,r - \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{2\mu(b^2 - a^2)}\,\frac{1}{r}}}
\tag{3.25}
$$

Большое количество интересных задач по теории и применению метода ТФКП можно найти в интересных книгах [4, стр. 124], [8, стр. 11].

Список литературы

[1] Тимошенко С.П. *История науки о сопротивлении материалов: С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений.* Книжный дом 'Либроком', Москва, 2009.

[2] Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. *Лекции по теории упругости.* Эдиториал УРСС, Москва, 1999.

[3] Победря Б.Е. *Лекции по тензорному анализу. 2-е изд.* МГУ, Москва, 1979.

[4] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Наука, Москва, 1966.

[5] Амензаде Ю.А. *Теория упругости. Издание второе, переработанное и дополненное.* Высшая школа, Москва, 1971.

[6] Тихонов А.Н., Свешников А.Г. *Теория функций комплексной переменной.* Наука, Москва, 1970.

[7] Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. *Введение в теорию аналитических функций.* Просвещение, М, 1977.

[8] Каландия Ф.И. *Математические методы двумерной упругости.* Наука, Москва, 1973.

[9] Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. *Теория упругости.* Наука, Москва, 1975.