

МДТТ ЛЕКЦИЯ №9 (14.04.2020)
Основы теории вязкоупругости. Часть 1.
Профессор В.И. Горбачев. Кафедра механики композитов.

1 Ползучесть и релаксация.	2
1.1 Ползучесть.	2
1.2 Релаксация.	3
1.3 Особенности построения теории вязкоупругости.	3
1.4 Механистический подход.	3
1.4.1 Модель Максвелла.	4
1.4.2 Модель Фойхта.	5
1.4.3 Модель Кельвина.	6
1.5 Обобщение одномерных моделей вязкоупругости.	6
1.5.1 Дифференциальная модель определяющих соотношений вязкоупругости.	7
2 Интегральные определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости.	7
2.1 Сингулярные и регулярные ядра ползучести и релаксации.	7
2.2 Стареющие и нестареющие вязкоупругие материалы.	7
2.3 Сингулярность ядер ползучести и релаксации.	8
2.4 Зависимости между ядрами ползучести и релаксации	9
2.5 Запись Больцмана (интегралы Стильтьеса). Функции ползучести и релаксации.	9
2.6 Экспериментальное определение функций ползучести и релаксации.	10
2.7 Как по заданной функции ползучести построить функцию релаксации?	11
2.8 Влияние температуры. Температурно-временная аналогия.	11

Введение.

В МДТТ тела отличаются друг от друга по их поведению при действии нагрузок. В момент приложения нагрузок к телу в нём практически мгновенно возникают деформации. Далее со временем могут быть различные ситуации.

1. Со временем с телом ничего не происходит. То есть, деформации и напряжения остаются постоянными и равными тем, которые возникли в теле в момент приложения нагрузок.

Если нагрузки небольшие и тело возвращается в исходное состояние после их снятия, то это означает, что тело находится в упругом состоянии.

Закон связи напряжений с деформациями может быть линейным и нелинейным. Если этот закон линейный, то тело находится в линейно упругом состоянии. В противном случае состояние тела называется нелинейно упругим. Некоторые материалы с самого начала нагружения могут вести себя нелинейным образом и остаются при этом упругими материалами. У других материалов нелинейность может проявляться только при достижении напряжений в теле некоторого предельного значения предельного значения, называемого пределом линейности, или пределом пропорциональности.

При больших нагрузках в теле могут появиться пластические деформации, которые не меняются с течением времени при фиксации нагрузок. Причём, после снятия нагрузок, деформации либо остаются в пределах достигнутых значений, либо частично снимаются. **Остаточные деформации после снятия нагрузок называются пластическими деформациями, либо упругопластическими, если часть деформаций пропадает. Состояние тела называется соответственно пластическим, либо упруго-пластическим.**

2. Вторая ситуация заключается в том, что при фиксированных нагрузках в теле, практически мгновенно, возникают либо упругие, либо упругопластические деформации. Далее со временем деформации могут оставаться постоянными, либо они растут. **Если со временем деформации растут, то тело находится в вязкоупругом, либо вязкоупругопластическом состоянии.**

Скорость роста деформаций зависит от величины приложенной нагрузки. Далее рассматриваются основы теории линейной вязкоупругости.

1 Ползучесть и релаксация.

1.1 Ползучесть.

Ползучесть — это процесс изменения деформации во времени при фиксированных нагрузках.

Процесс ползучести подразделяется на ограниченную и неограниченную ползучесть. *Ограниченная ползучесть* — это тот случай, когда деформация изменяется во времени не превышая предельных значений. При *неограниченной ползучести* деформации растут неограниченно.

Зависимость деформации от времени называется графиком или же диаграммой ползучести. Характер диаграммы ползучести существенно зависит от величины приложенной к образцу нагрузки $\sigma = P/S$. У многих материалов существует, так называемый, предел длительного сопротивления $\sigma_{пдс}$, после которого деформация в образце растёт неограниченно, вплоть до разрушения (рис. 1а)).

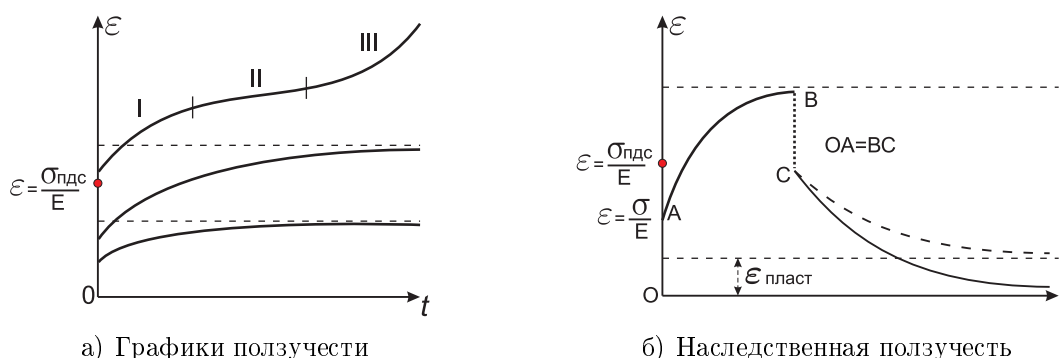


Рис. 1: Ползучесть при нагрузке и разгрузке.

У металлов при высоких температурах ПДС отсутствует и образец при ползучести всегда разрушается, даже при малых σ . При снятии нагрузки, деформация скачком уменьшается на величину упругой деформации, а потом со временем уменьшается либо до нуля, либо до некоторого предельного значения (рис. 1б)). Этот процесс называется **наследственная ползучесть**.

1.2 Релаксация.

Суть процесса релаксации выясняется в эксперименте на растяжение образца. Пусть образец растянут принудительно и получил деформацию $\varepsilon^* = (l - l_0)/l_0$.

Будем держать постоянной эту деформацию и следить за напряжением в образце. Если материал такой, что при этом удлинении образец получил только упругую, или же упругопластическую деформацию, то с течением времени напряжения в нём остаются постоянными, то есть не меняются со временем.

В вязкоупругом материале напряжения со временем будут асимптотически убывать, либо до нуля штриховая кривая на (рис. 2), либо до некоторого предела, отличного от нуля и соответствующего мгновенной упругопластической деформации — сплошная кривая на (рис. 2).

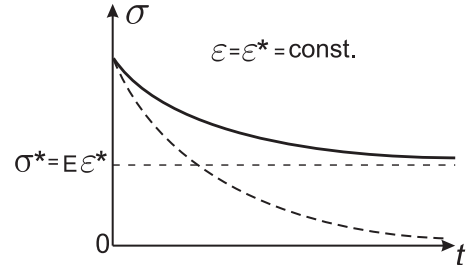


Рис. 2: График релаксации

1.3 Особенности построения теории вязкоупругости.

Чтобы построить теорию вязкоупругости нужны такие определяющие соотношения, которые включали бы время, прошедшее после приложения нагрузки к телу.

В настоящее время существует два подхода к построению определяющих соотношений:

1. Феноменологический подход, когда законы прямой и обратной связи тензора напряжений $\underline{\sigma}$ с тензором деформаций $\underline{\varepsilon}$ записываются из некоторых соображений

$$\underline{\sigma} = f(t, \underline{\varepsilon}, \dot{\underline{\varepsilon}}, T, \dots), \quad \underline{\varepsilon} = f(t, \underline{\sigma}, \dot{\underline{\sigma}}, T, \dots) \quad (1.1)$$

2. Механистический подход основан на простейших моделях и их комбинациях.

При любом подходе очевидно, что нужно учитывать упругость в начальный момент времени!

1.4 Механистический подход.

В механистическом подходе основными элементами являются пружина и поршень [1, стр. 37-46].

В пружине удлинение пропорционально силе (рис. 3).

$$\delta u = k_1 P \Rightarrow \varepsilon_U = \frac{\sigma_U}{E} \quad (1.2)$$

Рис. 3: Упругий элемент



Поршень представляет собой вязкий элемент, в котором скорость относительного удлинения пропорциональна приложенной силе (рис. 4)



Рис. 4: Вязкий элемент

$$\frac{d\delta u}{dt} = k_2 P \Rightarrow \dot{\varepsilon}_V = \frac{\sigma_V}{\eta} \quad (1.3)$$

1.4.1 Модель Максвелла.

Модель Максвелла представляет собой последовательно соединённые пружину и поршень (рис. 5)

$$\sigma_U = \sigma_V = \sigma, \quad \delta = \delta_U + \delta_V \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_U + \dot{\varepsilon}_V \quad (1.4)$$

Или

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (1.5)$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \frac{1}{\eta} \sigma(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

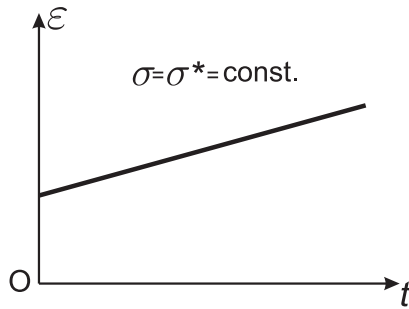


Рис. 5: Модель Максвелла

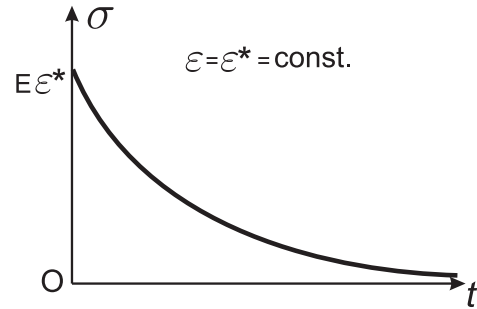
Обратное соотношение имеет вид:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - \frac{E^2}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

Теперь, пользуясь определяющими соотношениями (1.6) и (1.7) модели Максвелла, рассмотрим процессы ползучести и релаксации.



а) Неограниченная ползучесть



б) Релаксация в модели Максвелла

Рис. 6: Ползучесть и релаксация в модели Максвелла.

Ползучесть: $\sigma = \sigma^* = \text{const.}$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E} + \frac{\sigma^*}{\eta} t \quad (1.8)$$

Получается неограниченная ползучесть по линейному закону (рис. 6а).

Релаксация: $\varepsilon = \varepsilon^* = \text{const.}$

Из (1.7) получаем:

$$\sigma(t) = E\varepsilon^* e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (1.9)$$

График убывания (релаксации) напряжения с ростом времени изображен на рисунке 6б). На этом графике есть интересный момент времени $t^* = \frac{\eta}{E}$, при котором напряжение падает до значения $\sigma(t^*) = \frac{\sigma^*}{e} = \frac{\sigma^*}{2.718}$. Момент времени t^* принято называть временем релаксации.

Формулы (1.6) и (1.7) можно записать в иной форме, позволяющей делать обобщения на трёхмерный случай

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad K(t-\tau) = \frac{1}{E} \delta(t-\tau) + \frac{1}{\eta} h(t-\tau), \quad (1.10)$$

где $K(t-\tau)$ — ядро ползучести, $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака, $h(t-\tau)$ — функция Хевисайда [2, стр. 55].

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad \Gamma(t-\tau) = E\delta(t-\tau) - \frac{E^2}{\eta} e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} h(t-\tau). \quad (1.11)$$

Здесь $\Gamma(t-\tau)$ — ядро релаксации.

1.4.2 Модель Фойхта.

Модель Фойхта, в отличие от модели Максвелла, составлена из параллельных механических элементов — пружины и поршня. **Часто такую модель называют элементом Фойхта.**

Модель Фойхта устроена так, чтобы деформации в элементах были бы одинаковы $\varepsilon_U = \varepsilon_V = \varepsilon$, а напряжения складываются $\sigma = \sigma_U + \sigma_V$. Тогда

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (1.12)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

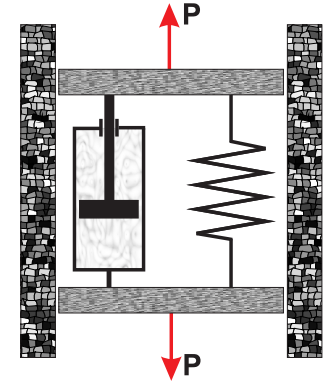


Рис. 7: Модель Фойхта

Процесс ползучести $\sigma = \sigma^* = \text{const.}$ по этой модели описывается следующей формулой

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^*}{E} \left(1 + e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что **модель Фойхта описывает ограниченную ползучесть.** Рассмотрим далее релаксацию по модели Фойхта. Воспользуемся формулой (1.12)

$$\varepsilon = \text{const.} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \sigma = E\varepsilon^* \quad (1.15)$$

Вывод: модель Фойхта не описывает релаксацию.

1.4.3 Модель Кельвина.

Модель Кельвина составлена путём последовательного сочетания пружины с жесткостью (модулем Юнга) E_1 и элемента Кельвина, в котором упругий элемент обладает жесткостью E_2 (рис. 8).

Общая деформация модели Кельвина равна сумме деформации пружины с жесткостью E_1 с деформацией от элемента Фойхта (1.13) $\varepsilon(t) = \varepsilon_U^{(1)}(t) + \varepsilon_\Phi(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1} - \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.16)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad K(t-\tau) = \frac{\delta(t-\tau)}{E_1} + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau)}$$

Обратные соотношения модели Кельвина имеют вид:

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) - \frac{E_1^2}{\eta} \int_0^t e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau,$$

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (1.17)$$

$$\Gamma(t-\tau) = E_1 \delta(t-\tau) - \frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1+E_2}{\eta}(t-\tau)}$$

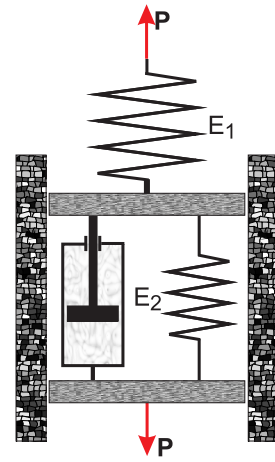


Рис. 8: Схема модели Кельвина

Согласно формуле (1.12) $\sigma = E_2 \varepsilon_\Phi + \eta \dot{\varepsilon}_\Phi$.

Кроме этого, $\varepsilon_U^{(1)} = \sigma/E_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_U^{(1)} + \varepsilon_\Phi$. Из этих трёх формул исключая деформации $\varepsilon_U^{(1)}$ и ε_Φ , получаем дифференциальную зависимость связывающие $(\sigma, \dot{\sigma})$ с $(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ [3, стр. 56]

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \sigma - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} = E_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (1.18)$$

Модель Кельвина описывает ограниченную ползучесть и релаксацию. Более подробное исследование модели Кельвина дано в книге Ю.Н. Работнова [3, стр. 111-113], а также в работах А.Ю. Ишлинского и А.Р. Ржаницына, цитированных Ю.Н. Работновым.

1.5 Обобщение одномерных моделей вязкоупругости.

Более сложные типы определяющих соотношений можно строить комбинируя в различных сочетаниях упругие и вязкие элементы с моделями Максвелла и Фойхта. В любом случае будут получаться дифференциальные определяющие соотношения типа (1.18).

1.5.1 Дифференциальная модель определяющих соотношений вязкоупругости.

В общем случае в дифференциальных определяющих соотношениях вязкоупругости в левой части равенства будут стоять дифференциальные полиномы некоторого порядка от напряжения, а с правой стороны дифференциальные полиномы другого порядка от деформации [4, стр. 114], то есть получается

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j \sigma}{dt^j} \quad (1.19)$$

2 Интегральные определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости.

2.1 Сингулярные и регулярные ядра ползучести и релаксации.

Реально использовать соотношения в виде (1.19) проблематично. **На примере моделей Максвелла и Кельвина было показано, что определяющие соотношения этих моделей можно записать в виде дифференциальных выражений, а также в виде эквивалентных интегральных операторов.**

Дифференциальные соотношения модели Максвелла представлены формулой (1.4), а интегральные — формулами (1.10) и (1.11). Дифференциальное соотношение модели Кельвина имеет вид (1.18), а интегральные — (1.16) и (1.17) то есть, записываются в виде таких же интегралов, только ядра у них другие.

Таким образом, общий вид одномерных определяющих соотношений линейной теории вязкоупругости даётся следующими интегральными формулами:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau}, \quad \boxed{\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau}, \quad (2.1)$$

где $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, а $\Gamma(t, \tau)$ — ядро релаксации. Эти ядра находятся экспериментально.

2.2 Стареющие и нестареющие вязкоупругие материалы.

Понятие стареющие связано с тем, что с течением времени ядра ползучести и релаксации у стареющих материалов меняются со временем. По этой причине ядра зависят от двух временных переменных.

Если материал не стареет, то это означает, что НДС материала при нагружении не зависит от начала отсчёта времени, то есть $\varepsilon(t) = \varepsilon(t - t_N)$ и $\sigma(t) = \sigma(t - t_N)$. Следовательно, в соответствии с первой формулой (2.1)

$$\varepsilon(t - t_N) = \int_0^{t-t_N} K(t - t_N, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

но с другой стороны, вследствие равенств $\varepsilon(t) = \varepsilon(t - t_N)$ и $\sigma(t) = \sigma(t - t_N)$

$$\varepsilon(t - t_N) = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau - t_N) d\tau \quad (2.3)$$

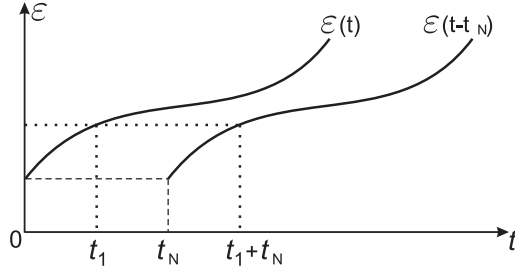


Рис. 9: Независимость деформации от сдвига времени

В формуле (2.2) в интеграле сделаем замену $\tau = \vartheta - t_N$, тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon(t - t_N) &= \int_{-t_N}^t K(t - t_N, \vartheta - t_N) \sigma(\vartheta - t_N) d(\vartheta - t_N) = \int_{-t_N}^t K(t - t_N, \tau - t_N) \sigma(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t K(t - t_N, \tau - t_N) \sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сравнивая равенства (2.3) и (2.4), получаем

$$K(t - t_N, \tau - t_N) = K(t, \tau), \quad (2.5)$$

при любых значениях t_N ! Но это возможно только, если

$$\boxed{K(t, \tau) = K(t - \tau)} \quad (2.6)$$

У нестареющих материалов ядра зависят от разности аргументов. Поэтому определяющие соотношения (2.1) принимают вид:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau}, \quad \boxed{\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau} \quad (2.7)$$

2.3 Сингулярность ядер ползучести и релаксации.

Для учета мгновенной упругости ядра должны состоять из суммы сингулярной и регулярной составляющих.

$$K(t, \tau) = \frac{\delta(t - \tau)}{E} + \widetilde{K}(t, \tau), \quad \Gamma(t, \tau) = E\delta(t - \tau) - \widetilde{\Gamma}(t, \tau), \quad (2.8)$$

При этом, в интегральных формулах (2.1) нижний предел интегрирования понимается как $0-$, то есть, вместо формул (2.1) на самом деле надо было бы написать

$$\varepsilon(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{0-\alpha}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{0-\alpha}^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

В этом случае, при подстановке (2.8) в формулы (2.1), получаем

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{0-}^t \widetilde{K}(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = E\varepsilon(t) - \int_{0-}^t \widetilde{\Gamma}(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau} \quad (2.10)$$

2.4 Зависимости между ядрами ползучести и релаксации .

Если в правую часть выражения для ε подставить выражение для σ , то должны получить тождество

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) \left[\int_0^\tau \Gamma(\tau, \tau_1) \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau \stackrel{?}{=} \int_0^t \left[\int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau \right] \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 = \varepsilon(t).$$

$\varepsilon(t)$ слева будет совпадать с $\varepsilon(t)$ справа, если принять, что ядра ползучести и релаксации связаны между собой следующей зависимостью

$$\boxed{\int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau = \delta(t - \tau_1)} \quad (2.11)$$

Только тогда

$$\int_{0-}^t \delta(t - \tau_1) \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 = \varepsilon(t)$$

Связь между регулярными ядрами ползучести и релаксации получается, если в (2.11) подставить зависимости (2.8). После несложных преобразований получаем:

$$\boxed{\int_{\tau_1}^t \widetilde{K}(t, \tau) \widetilde{\Gamma}(\tau, \tau_1) d\tau + \frac{1}{E} \widetilde{\Gamma}(t, \tau_1) = E \widetilde{K}(t, \tau_1)} \quad (2.12)$$

Таким образом, **если известно регулярное ядро ползучести, то регулярное ядро релаксации находится из интегрального уравнения (2.12), которое решается методом последовательных приближений. Ядро релаксации можно также получить и экспериментально. Сравнивая экспериментальные результаты с теоретическими можно проверить основные положения теории [1, стр. 25].**

2.5 Запись Больцмана (интегралы Стильтьеса). Функции ползучести и релаксации.

Запишем определяющие соотношения (2.10) в другой форме. Для этого положим

$$\begin{aligned} \Pi(t, \tau) &= - \int_0^t \widetilde{K}(t, \tau) d\tau, & \widetilde{K}(t, \tau) &= - \frac{\partial \Pi(t, \tau)}{\partial \tau}, & \Pi(t, t) &= \text{const.} = \frac{1}{E}, \\ R(t, \tau) &= \int_0^t \widetilde{\Gamma}(t, \tau) d\tau, & \widetilde{\Gamma}(t, \tau) &= \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau}, & R(t, t) &= \text{const.} = E \end{aligned} \quad (2.13)$$

С учетом того, что $\sigma(0-) = 0$ и $\varepsilon(0-) = 0$, получаем из формул другую запись соотношений (2.10), впервые полученную Больцманом

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \Pi(t, \tau) d\sigma(\tau)}, \quad \boxed{\sigma(t) = \int_{0-}^t R(t, \tau) d\varepsilon(\tau)}, \quad (2.14)$$

где $\Pi(t, \tau)$ — функция ползучести, а $R(t, \tau)$ — функция релаксации. В случае нестареющих материалов формулы (2.11) принимают вид:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau)}, \quad \boxed{\sigma(t) = \int_{0-}^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau)}. \quad (2.15)$$

Интегралы в правой части определяющих соотношений (2.14), (2.15) называются интегралами Стильтьеса [5, стр. 298-295].

2.6 Экспериментальное определение функций ползучести и релаксации.

Формулы (2.15) одномерной теории вязкоупругости **нестареющих материалов** позволяют достаточно просто провести эксперимент по определению функций ползучести и релаксации.

1. Эксперимент на ползучесть. В опыте на ползучесть к образцу мгновенно прикладывается напряжение $\sigma(t) = \sigma^* h(t)$, где $h(t)$ — единичная функция Хевисайда. В этом случае из первой формулы (2.12) имеем:

$$\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \Pi(t - \tau) \sigma^* \delta(\tau) d\tau = \sigma^* \Pi(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi(t) = \frac{\varepsilon_3(t)}{\sigma^*}, t \geq 0} \quad (2.16)$$

Здесь $\varepsilon_3(t)$ — измеренная в эксперименте продольная деформация.

В процессе эксперимента задаём последовательно возрастающие значения напряжения (нагрузки) $\sigma_1^* < \sigma_1^*, \dots, < \sigma_n^*$.

Замечание 1. Если при малых нагрузках функция ползучести не зависит от величины, приложенной нагрузки (от σ^*), то это означает, что определяющие соотношения линейны. Если же при некотором $\sigma_i^* \geq \sigma_{max}^*$ функция ползучести становится зависимой от напряжения σ_i^* , то это означает, что достигнуто предельное значение нагрузки (напряжения σ^*), после которой определяющие соотношения становятся нелинейными.

2. Эксперимент на релаксацию. В этом эксперименте к образцу мгновенно прикладывается деформация $\varepsilon(t) = \varepsilon^* h(t)$ и остаётся постоянной в течение всего эксперимента. Допустим, что у нас есть возможность достаточно точно измерять и фиксировать величину напряжения в каждый момент времени.

Из второй формулы (2.15) получаем:

$$\sigma(t) = \int_{0-}^t R(t - \tau) \varepsilon^* \delta(\tau) d\tau = \varepsilon^* R(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R(t) = \frac{\sigma_3(t)}{\varepsilon^*}, t \geq 0} \quad (2.17)$$

Здесь $\sigma_3(t)$ — измеренное в эксперименте напряжение в образце.

Замечание 2. Если при малых заданных деформациях ε^* функция релаксации не зависит от величины ε^* , то это означает, что определяющие соотношения линейны. Если же при некотором $\varepsilon_i^* \geq \varepsilon_{max}^*$ функция ползучести становится зависимой от деформации ε_i^* , то это означает, что достигнуто предельное значение деформации ε_{max}^* , после которой определяющие соотношения становятся нелинейными.

2.7 Как по заданной функции ползучести построить функцию релаксации?

Будем рассматривать случай нестареющих материалов. В этом случае выражение (2.12), связывающее регулярное ядро ползучести с регулярным ядром релаксации можно записать в виде:

$$\int_0^t \tilde{K}(t-\tau)\tilde{\Gamma}(\tau)d\tau + \frac{1}{E}\tilde{\Gamma}(t) = E\tilde{K}(t) \quad (2.18)$$

Согласно (2.10)

$$\tilde{K}(t-\tau) = -\frac{\partial\Pi(t-\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\Pi(t-\tau)}{\partial t} \equiv \dot{\Pi}(t-\tau) \Rightarrow \tilde{K}(t) = \frac{d\Pi(t)}{dt} \equiv \dot{\Pi}(t)$$

Итак, регулярное ядро ползучести $\tilde{K}(t)$ задано либо аналитически, либо экспериментально. Ядро релаксации находится из интегрального уравнения (2.18), которое называется уравнением типа Вольтерра [6, стр. 77]. Для его решения применяется метод последовательных приближений.

Другой способ определения функции релаксации, соответственно и ядра релаксации, будет рассмотрен позже, во второй части лекции.

2.8 Влияние температуры. Температурно-временная аналогия.

Из экспериментов при различных температурах над образцами из вязкоупругих материалов следует, что ползучесть и релаксация существенно зависят от температуры T , при которой проводятся испытания. Установлено, что при повышении температуры мгновенные упругие свойства слабо реагируют на температуру. Основное влияние температура оказывает на функции ползучести и релаксации. Таким образом, в общем случае функции ползучести и релаксации зависят не только от времени, но и от температуры, которая тоже может изменяться со временем

$$\Pi = \Pi(t, T(t)), \quad R = R(t, T(t)), \quad (2.19)$$

Поэтому, например, закон ползучести (2.15) записывается так:

$$\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \Pi(t-\tau, T)d\sigma(\tau) \quad (2.20)$$

Экспериментальные данные указывают на то, что для многих полимерных материалов в определённом диапазоне температур функцию ползучести можно представить в виде [7, стр. 126]

$$\Pi(t, T(t)) = \Pi(t'), \quad t' = \int_0^t \frac{1}{a(T(\xi))} d\xi = f(t), \quad (2.21)$$

где t' — новое приведенное время, а $a(T)$ функция температуры, определяемая из экспериментов на ползучесть при разных температурах [1, 8]. Такие материалы принято называть **терморологически простыми материалами** [9, стр. 136].

В новой переменной вместо (2.20) получаем:

$$\varepsilon(t) = \int_{0-}^t \Pi(t' - \tau') d\sigma(\tau), \quad \tau' = \int_0^{\tau} \frac{1}{a(T(\xi))} d\xi = f(\tau) \quad (2.22)$$

Между t и t' , а также между τ и τ' имеется взаимно-однозначное соответствие, то есть

$$t = \int_0^{t'} a(T(\xi)) d\xi = f^{-1}(t'), \quad \tau = \int_0^{\tau'} a(T(\xi)) d\xi = f^{-1}(\tau'), \quad (2.23)$$

следовательно, ε и σ можно считать функциями t' и тогда определяющие соотношения (2.15) можно записать в новом масштабе времени точно в таком же виде, как в старом, только время t заменяется на приведенное время t' :

$$\varepsilon(t') = \int_{0-}^{t'} \Pi(t' - \tau') d\sigma(\tau'), \quad \sigma(t') = \int_{0-}^{t'} R(t' - \tau') d\varepsilon(\tau'). \quad (2.24)$$

Или

$$\varepsilon(t') = \frac{\sigma(t')}{E} + \int_{0-}^{t'} \tilde{K}(t' - \tau') \sigma(\tau') d\tau', \quad \sigma(t') = E\varepsilon(t') - \int_{0-}^{t'} \tilde{\Gamma}(t' - \tau') \varepsilon(\tau') d\tau' \quad (2.25)$$

Принцип, основанный на введении приведенного времени называют "температурно-временной аналогией". Он был предложен с целью сокращения времени испытаний при определении характеристик ползучести и релаксации вязкоупругих материалов при низких температурах.

Список литературы

- [1] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Наука, Москва, 1970.
- [2] Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Мир, Москва, 1978.
- [3] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. Наука, Москва, 1977.
- [4] Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. Наука, Москва, 1966.
- [5] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу*. Высшая школа, Москва, 1999.
- [6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Наука, М, 1972.
- [7] Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П. *Механика полимеров*. Изд-во МГУ, Москва, 1975.
- [8] Ферри Дж. *Вязкоупругие свойства полимеров*. Иностранная литература, Москва, 1963.
- [9] Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. Мир, Москва, 1974.