

УДК 531.36:534.1+533.6.013.42

© 2013 г. В. В. Веденеев

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОДНОМОВОМ ФЛАТТЕРЕ ПЛАСТИНЫ

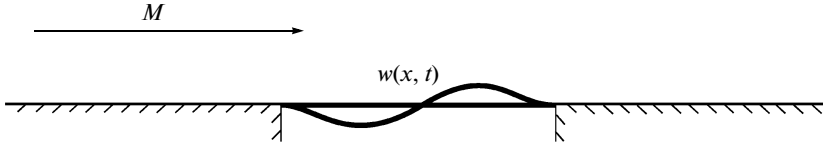
В нелинейной постановке исследуется развитие одномодового флаттера упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа. При небольшом углублении в область неустойчивости имеется единственный предельный цикл, соответствующий единственной растущей моде. При появлении второй растущей моды возникает несколько новых нерезонансных предельных циклов, найдены области их существования и устойчивости. При тех же параметрах могут существовать предельные циклы с внутренним резонансом, в которых имеется энергообмен между модами. Получены зависимости амплитуд предельных циклов от параметров задачи, что позволяет оценить опасность возникновения флаттера.

Задача исследования устойчивости упругих пластин в сверхзвуковом потоке газа возникает в связи с явлением панельного флаттера — интенсивных вибраций отдельных панелей обшивки летательных аппаратов, движущихся с большой скоростью. Этот тип флаттера непосредственно не связан с флаттером крыльев и оперения, но также может приводить к накоплению усталостного повреждения и разрушению панелей обшивки [1].

Как правило, при исследовании флаттера пластины для вычисления возмущения давления, действующего на нее, используется поршневая теория — дифференциальная связь между возмущением давления и прогибом пластины [2–4]. Эта теория является пределом точной линейризованной теории потенциального течения при $M \rightarrow \infty$ или $\omega \rightarrow 0$ (M — число Маха потока газа, ω — частота колебаний). Считается, что поршневая теория работает на практике, начиная примерно с $M \geq 1.7$ [3].

Основной недостаток поршневой теории заключается в том, что она может описать возникновение лишь одного из двух видов панельного флаттера — флаттера связанного типа. При малых сверхзвуковых скоростях ($1 < M < 2$) возникает другой, одномодовый тип флаттера, который может быть получен лишь при использовании теории потенциального течения или более сложных моделей. В линейной постановке этот тип флаттера исследовался аналитически (при больших размерах пластины) [5] и численно (при произвольных размерах) [6], проведены эксперименты [7], подтвердившие существование одномодового флаттера. Исследовалась нелинейная задача и найдена амплитуда предельного цикла в случае, когда растущей является одна мода [8]; показано, что рост амплитуды при углублении в область неустойчивости происходит намного быстрее, чем при флаттере связанного типа. Однако область флаттера по одной моде мала, и при небольшом увеличении скорости потока растущими становятся сразу несколько мод. Ниже изучаются предельные циклы, возникающие при флаттере по нескольким модам одновременно.

1. Постановка задачи. Исследуются нелинейные колебания упругой растянутой пластины, обтекаемой с одной стороны плоскопараллельным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа (фиг. 1), в случае ее одномодового флаттера. С другой стороны к пластине приложено постоянное давление, равное невозмущенному давлению потока. Нелинейность задачи вызвана геометрической нелинейностью поведения пластины — мембранными напряжениями, возникающими при изгибе (модель больших прогибов Кармана). Возмущение давления газа, действующее на пластину, считается линейно зависящим от прогиба, так как аэродинамическая нелинейность существенно влияет на колебания пластины лишь при очень больших (порядка 10) числах Маха M ([3], §4.18) и в трансзвуковой области [9].



Фиг. 1

Задача рассматривается в двумерной постановке. После выражения возмущения давления через прогиб пластины задача становится одномерной с одной неизвестной функцией – прогибом. В безразмерных переменных уравнение движения пластины имеет вид ([10], §24)

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(M_w^2 + K \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\partial w(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P\{w\} = 0 \quad (1.1)$$

$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)a^2\rho_m}, \quad M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a}, \quad K = \frac{E}{(1-\nu^2)a^2\rho_m} = 12D, \quad L = \frac{L_w}{h}, \quad M = \frac{u}{a}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

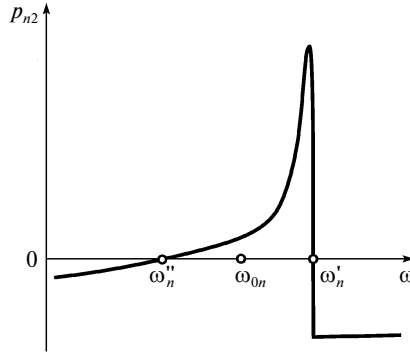
Здесь $w(x, t)$ – прогиб пластины, отнесенный к ее толщине, E , ν и ρ_m – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность ее материала, L_w и h – ширина и толщина пластины, σ – растягивающее напряжение, u и ρ – скорость и плотность газа, a – скорость звука в газе. Натяжение пластины (коэффициент при $\partial^2 w / \partial x^2$) складывается из двух частей: первое слагаемое – постоянное приложенное к пластине натяжения, второе слагаемое – нелинейное натяжение, возникающее при изгибе. Конструкционным демпфированием пластины пренебрегается (его можно учесть, уменьшив аэродинамическое усиление, введенное ниже, на величину коэффициента демпфирования). Параметры D и L – безразмерная жесткость и ширина пластины, M_w и K характеризуют ее натяжение и нелинейность, M и μ – число Маха и безразмерная плотность газа. Выражение для K написано в предположении, что кромки пластины не смещаются при изгибе, в противном случае $K < 12D$. Оператор $P\{w(x, t)\}$ – возмущение давления газа. Пластина занимает область $-L/2 \leq x \leq L/2$, на краях заданы условия защемления или шарнирного опирания.

2. Уравнения для амплитуд. Задача решается методом Бубнова. Разложим решение (1.1) по ортонормированным собственным функциям пластины в пустоте:

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x) A_j(t) \quad (2.1)$$

с неизвестными амплитудами $A_j(t)$. После применения процедуры Бубнова получаем систему уравнений относительно A_n ($n = 1, 2, \dots$)

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} + \omega_{0n}^2 A_n + K \sum_{m,k,j=1}^{\infty} a_{mk} a_{jn} A_m A_k A_j + \sum_{j=1}^{\infty} P_{jn} = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 2

где

$$a_{jn} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dW_j}{dx} \frac{dW_n}{dx} dx, \quad P_{jn}(t) = \int_{-L/2}^{L/2} P\{W_j A_j\} W_n dx$$

При этом $a_{jn} = a_{nj}$, $a_{jj} > 0$, а в частном случае шарнирного опирания по обеим кромкам $a_{jn} = 0$ при $j \neq n$.

Было показано [8], что при одномодовом флаттере, когда влияние потока на собственные моды пластины мало:

$$\frac{|P_{jn}|}{|P_{nn}|} \ll 1, j \neq n, \quad P_{nn}(t) \approx -2p_{n2}(\omega) \frac{dA_n(t)}{dt} \tag{2.3}$$

Смысл последнего соотношения в том, что при одномодовом флаттере действие потока сводится к аэродинамическому усилению (или демпфированию) колебаний. Коэффициент аэродинамического усиления $p_{n2}(\omega)$ зависит от характерной частоты колебаний, причем имеется диапазон частот $\omega_n'' < \omega < \omega_n'$, где его знак положителен (на фиг. 2 показан качественный вид функции $p_{n2}(\omega)$), что соответствует одномодовой неустойчивости в линейном приближении. Значения ω_n' и ω_n'' различны для разных мод. Для дальнейшего понадобится явная формула

$$\omega_n' = (M - 1)\chi_n/L \tag{2.4}$$

где χ_n – зависящие от граничных условий постоянные, входящие в формулу для n -й собственной частоты пластины

$$\omega_{0n}^2 = D(\chi_n/L)^4 + M_w^2(\chi_n/L)^2$$

Группируя в уравнениях (2.2) слагаемые с разными степенями A_n и учитывая приближенные равенства (2.3), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 A_n}{dt^2} - 2p_{n2}(\omega) \frac{dA_n}{dt} + \left(\omega_{0n}^2 + K \sum_{\substack{m,k=1 \\ m,k \neq n}}^{\infty} (a_{mk} a_{nn} + 2a_{mn} a_{kn}) A_m A_k \right) A_n + \\ & + 3K \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} a_{mn} a_{nn} A_m \right) A_n^2 + K a_{nn}^2 A_n^3 + K \sum_{\substack{m,k,j=1 \\ m,k,j \neq n}}^{\infty} a_{mk} a_{jn} A_m A_k A_j = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Одна линейно растущая мода. Считая, что $|A_n| \ll |A_1|$, $n > 1$, в уравнении (2.5) для A_1 можно отбросить все члены, содержащие амплитуды с индексом выше 1. Тогда оно запишется в виде

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} - 2p_{12}(\omega) \frac{dA_1}{dt} + \omega_{01}^2 A_1 + Ka_{11}^2 A_1^3 = 0 \quad (3.1)$$

Методом гармонического баланса были найдены [8] предельные циклы этого уравнения во втором приближении:

$$A_1(t) = C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t; \quad C_1 = \sqrt{\frac{4(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{3Ka_{11}^2}}, \quad C_3 = \frac{Ka_{11}^2}{4(9\omega^2 - \omega_{01}^2)} C_1^3 \quad (3.2)$$

$$p_{12}(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_1', \quad \omega = \omega_1''$$

Так как в случае, когда первая мода является растущей в линейном приближении, $\omega_1'' < \omega_{01} < \omega_1'$, то из соотношений (3.2) получаем, что колебания с частотой ω_1'' невозможны, и есть только один предельный цикл, имеющий частоту ω_1' .

Рассмотрим процесс усиления колебаний. Представим, что в пластине возбуждается малое начальное возмущение по первой моде, растущее со временем, $p_{12}(\omega_{01}) > 0$. Благодаря нелинейному члену в уравнении (3.1) амплитуда и частота связаны между собой, и частота вслед за амплитудой также начинает расти. Увеличение частоты означает движение вправо по кривой $p_{12}(\omega)$ (фиг. 2). Так как без учета действия газа решения уравнения (3.1) имеют вид нейтральных колебаний с произвольной амплитудой, нелинейность сама по себе не может привести к прекращению роста амплитуды. В результате, пока $p_{12}(\omega) > 0$, увеличение амплитуды, а следовательно, и частоты, будет продолжаться. Когда частота ω достигнет значения ω_1' , величина $p_{12}(\omega)$ станет равной нулю, и усиление сменится нейтральным колебанием. Основного внутреннего резонанса не будет, так как $\omega_1' < \omega_n' < \omega_{0n}$, $n > 1$. Дробные резонансы при этом не исключены, они изучаются ниже.

Приведенные рассуждения наглядно иллюстрируются уравнением энергии. Умножим уравнение (3.1) на dA_1/dt и преобразуем к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dA_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 A_1^2 + Ka_{11}^2 \frac{A_1^4}{4} \right) = 2p_{12}(\omega) \left(\frac{dA_1}{dt} \right)^2 \quad (3.3)$$

Левая часть полученного равенства представляет собой изменение полной энергии колебания. При $p_{12}(\omega) > 0$ она увеличивается, при $p_{12}(\omega) < 0$ — уменьшается, и только в случае $p_{12}(\omega) = 0$ колебания нейтральны.

Из уравнения (3.3) сразу следует, что полученный предельный цикл с частотой ω_1' устойчив, так как увеличение (уменьшение) амплитуды приводит к увеличению (уменьшению) частоты и обратному эффекту со стороны давления — уменьшению (увеличению) энергии и амплитуды.

Отметим, что зависимость амплитуд (3.2) от частоты — такая же, как и при нелинейных колебаниях пластины в вакууме. Отличие состоит в том, что частота колебаний в вакууме может быть произвольной, а в потоке она определена условием $\omega = \omega_1'$.

4. Нерезонансные многочастотные колебания. Конкретные расчеты показывают, что область чисел Маха, где растущей является только одна мода, весьма узка. Рассмотрим случай, когда вторая мода также становится растущей. Оставляя в равенствах (2.5) две амплитуды A_1 и A_2 , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 A_1 + K(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2)A_2^2 A_1 + 3Ka_{11}a_{21}A_2 A_1^2 + Ka_{11}^2 A_1^3 + Ka_{22}a_{12}A_2^3 &= 0 \\ \mathcal{L}_2 A_2 + K(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2)A_1^2 A_2 + 3Ka_{22}a_{12}A_1 A_2^2 + Ka_{22}^2 A_2^3 + Ka_{11}a_{12}A_1^3 &= 0 \\ \mathcal{L}_j = \frac{d^2}{dt^2} - 2p_{j2}(\omega) \frac{d}{dt} + \omega_{0j}^2, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Как и ранее [8], предположим, что установившиеся колебания по каждой моде близки к гармоническим. Обозначим частоты основных гармоник первой и второй мод как ω_1 и ω_2 . Поскольку система (4.1) не разделяется, решение для каждой амплитуды содержит не только субгармоники основной частоты, но также и всевозможные гармоники с частотами вида $m\omega_1 \pm n\omega_2$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда, опуская из-за громоздкости точный вид решения, выпишем гармоники, существенные во втором приближении:

$$\begin{aligned} A_j(t) = & C_{j1} \cos(\omega_j t + (j-1)\varphi) + C_{j3} \cos(3\omega_j t + 3(j-1)\varphi) + \\ & + Q_{j1} \cos((2\omega_2 - \omega_1)t + 2\varphi) + Q_{j2} \cos((2\omega_2 + \omega_1)t + 2\varphi) + \\ & + Q_{j3} \cos((2\omega_1 - \omega_2)t - \varphi) + Q_{j4} \cos((2\omega_1 + \omega_2)t + \varphi) + \\ & + Q_{j5} \cos(\omega_{3-j} t + (2-j)\varphi) + Q_{j6} \cos(3\omega_{3-j} t + 3(2-j)\varphi) + \dots, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

Здесь φ – произвольный сдвиг фазы между первой и второй модами, многоточиями заменены ряды по остальным гармоникам. Полагая амплитуды основных гармоник C_{11}, C_{21} много большими остальных, подставим эти выражения в систему (4.1) и приравняем коэффициенты при $\cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, \cos(\omega_2 t + \varphi), \sin(\omega_2 t + \varphi)$. Тогда получим систему для определения амплитуд и частот основных гармоник.

Отметим свойства решений этой системы. Уравнения для амплитуд (получаемые из равенств коэффициентов при косинусах) – те же, что и для колебаний пластины в вакууме. Учет действия газа сводится лишь к выбору определенных частот $\omega_1 = \omega'_1$ и $\omega_2 = \omega'_2$, являющихся решениями уравнений $p_{12}(\omega) = 0$ и $p_{22}(\omega) = 0$, такими, что $\omega'_1 > \omega_{01}$ и $\omega'_2 > \omega_{02}$. Амплитуды высших гармоник явно выражаются через C_{11} и C_{21} , однако поправки, вносимые ими, малы.

Система уравнений для C_{11} и C_{21} имеет три нетривиальных решения. Два решения

$$C_{(3-j)1} = 0, \quad C_{j1}^2 = \frac{4(\omega_j^2 - \omega_{0j}^2)}{3\kappa_j}, \quad \omega_j = \omega'_j; \quad \kappa_j = Ka_{jj}^2$$

описывают одночастотные колебания по первой ($j = 1$) и второй ($j = 2$) модам. Третье решение – двухчастотные колебания:

$$C_{j1}^2 + \frac{2\eta_j}{3} C_{(3-j)1}^2 = \frac{4(\omega_j^2 - \omega_{0j}^2)}{3\kappa_j}, \quad \omega_j = \omega'_j, \quad \eta_j = \frac{a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2}{a_{jj}^2}, \quad j = 1, 2 \tag{4.2}$$

Разрешая систему (4.2) относительно амплитуд, получаем

$$C_{j1}^2 = \frac{12(\omega_j^2 - \omega_{0j}^2) - 8\eta_{3-j}(\omega_{3-j}^2 - \omega_{0(3-j)}^2)}{9\kappa_j - 4\kappa_{3-j}\eta_{3-j}^2} > 0, \quad \omega_j = \omega'_j, \quad j = 1, 2 \tag{4.3}$$

Неравенства являются условием существования двухчастотного предельного цикла; одночастотные предельные циклы, очевидно, существуют всегда. Исследуем эти условия, для простоты считая, что на передней и задней кромках пластины заданы одинаковые граничные условия, тогда $a_{12} = 0$.

Подставив выражения (2.4) в неравенства (4.3), перепишем их в виде

$$N_1 - \frac{4}{9}\zeta N_2 > 0, \quad N_1 + \zeta N_2 > 0, \quad N_j = (M - 1)^2 - (M_j^* - 1)^2, \quad \zeta = \frac{3 a_{11} \chi_2^2}{2 a_{22} \chi_1^2} > 1 \quad (4.4)$$

Здесь $M = M_j^*$ — границы устойчивости первой ($j = 1$) и второй ($j = 2$) моды. Для условия шарнирного опирания кромок пластины $a_{11}/a_{22} = 0.25$, $\chi_2^2/\chi_1^2 = 4$, $\zeta = 3/2$, для условия защемления $a_{11}/a_{22} = 0.267$, $\chi_2^2/\chi_1^2 = 2.761$, $\zeta = 1.106$. Нетрудно видеть, что при этих условиях первое неравенство (4.4) выполнено всегда, так как $M_1^* < M_2^*$.

Второе неравенство (4.4) при $M = M_2^*$ не выполнено, т.е. двухчастотный предельный цикл существует не всегда. Разрешая это неравенство относительно M , получаем

$$M \geq 1 + \sqrt{\frac{\zeta(M_2^* - 1)^2 - (M_1^* - 1)^2}{\zeta - 1}} \quad (4.5)$$

Для примера рассмотрим металлическую пластину в потоке воздуха на уровне моря:

$$D = 23.9, \quad L = 300 \quad (4.6)$$

Тогда $M_1^* \approx 1.051$, $M_2^* \approx 1.102$ при шарнирном опирании и $M_1^* \approx 1.077$, $M_2^* \approx 1.128$ при защемлении. Условие существования двухчастотного предельного цикла (4.5) имеет вид $M \geq 1.162$ и $M \geq 1.34$ соответственно.

Изучим устойчивость предельных циклов. Запишем уравнение изменения энергии для пластины. Для этого умножим первое уравнение (4.1) на dA_1/dt , второе на dA_2/dt и сложим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dA_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dA_2}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 A_1^2 + \frac{1}{2} \omega_{02}^2 A_2^2 + \frac{Ka_{11}}{4} A_1^4 + \frac{Ka_{22}}{4} A_2^4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} K(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) A_1^2 A_2^2 + Ka_{12}a_{11} A_1^3 A_2 + Ka_{12}a_{22} A_1 A_2^3 \right) = \\ & = 2p_{12}(\omega_1) \left(\frac{dA_1}{dt} \right)^2 + 2p_{22}(\omega_2) \left(\frac{dA_2}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выражение в левой части — производная от полной энергии пластины (суммы кинетической и потенциальной), правая часть — работа, совершаемая потоком газа над пластиной.

Пусть существуют только одночастотные предельные циклы. Так же, как в разд. 3, доказывается, что оба они устойчивы по отношению к возмущениям моды, по которой происходят колебания: увеличение ее амплитуды приводит к уменьшению полной энергии и, как следствие, амплитуды, а уменьшение амплитуды — к увеличению энергии и амплитуды.

Изучим возмущения изначально покоящейся моды. Сначала рассмотрим колебания по первой моде и возмутим вторую, придав ей малую амплитуду $C_{21} \approx 0$. Из первого уравнения (4.2) при $j = 2$ определится ее частота ω_2 . Так как при $\omega_2 = \omega_2'$ неравенство (4.3) при $j = 2$ не выполняется (иначе бы существовал двухчастотный предельный цикл), то $\omega_2 > \omega_2'$, откуда $p_{22}(\omega_2) < 0$. Тогда из (4.7) получаем, что колебания по второй моде затухают, и предельный цикл колебаний по первой моде устойчив. Рассмотрим теперь колебания по второй моде и возмутим первую, придав ей малую амплитуду $C_{11} \approx 0$. Ее частота ω_1 определится из первого уравнения (4.2) при $j = 1$. Поскольку при

$\omega_1 = \omega_1'$ неравенство (4.3) при $j = 1$ выполняется строго, то $\omega_1 < \omega_1'$. Но это означает, что $p_{12}(\omega_1) > 0$, и колебания по первой моде усиливаются. Таким образом, предельный цикл колебаний по второй моде неустойчив.

Аналогично доказывается, что если двухчастотный предельный цикл существует, то он устойчив, а оба одночастотных — неустойчивы по отношению к возмущениям изначально покоящейся моды. Таким образом, устойчив только один нерезонансный предельный цикл, а число мод, участвующих в нем, максимально среди циклов, которые существуют при данных параметрах задачи.

При увеличении M и выходе какой-либо моды из области неустойчивости ($\omega_{0n} < \omega_n''$) появляется неустойчивый предельный цикл с частотой колебаний по этой моде ω_n'' , разделяющий области притяжения двух устойчивых циклов, в одном из которых эта мода участвует, а в другом — нет. Появление такого цикла было рассмотрено [8] в случае одной растушей моды.

При произвольных граничных условиях и неустойчивости по трем и более модам также имеются предельные циклы, состоящие из разного количества мод, но их интервалы устойчивости могут взаимодействовать сложнее, чем в случае двух мод. Заметим, что порядок амплитуд в нерезонансных многочастотных предельных циклах — такой же, как и в одночастотных предельных циклах, поскольку все они описываются уравнениями типа (4.2).

5. Многочастотные колебания с четным внутренним резонансом. Как известно, при действии на линейную систему внешней периодической силы резонансное колебание возникает, только если ее частота совпадает с собственной. Наличие нелинейности порождает, помимо основного резонанса, также дробные резонансные колебания с частотами вида $p\omega/q$, где p и q — целые числа [11–13]. Если система состоит из нескольких связанных подсистем (как пластина, каждую моду которой можно рассматривать как отдельную подсистему), то они могут вступать в резонанс между собой и породить колебания с внутренним резонансом.

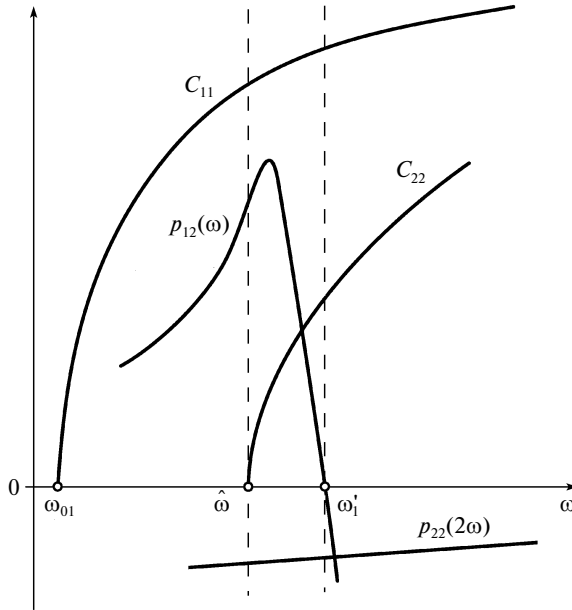
Исследуем колебания, при которых имеется внутренний резонанс 1:2, для определенности будем считать, что резонируют первая и вторая моды. Для простоты в этом разделе ограничимся случаем, когда на краях пластины заданы одинаковые граничные условия, тогда $a_{12} = 0$. Также будем считать, что граничные условия отличны от условий шарнирного опирания, так как в противном случае $\omega_2'(M) = 2\omega_1'(M)$, и различие между резонансным и нерезонансным предельным циклом, изученным выше, исчезает.

Отметим сначала одно важное свойство четного резонанса. Кубическая нелинейность при таких колебаниях $(a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t)^3$ даст, среди прочего, гармонику с частотой $2\omega_1 - \omega_2$. При резонансе 1:2, когда $\omega_2 = 2\omega_1$, такая гармоника — постоянное отклонение пластины от положения равновесия. Оно, как будет видно ниже, обеспечивает энергообмен между модами при четном резонансе, и его необходимо учитывать. Таким образом, ищем решение в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{10} + C_{11} \cos \omega t + C_{12} \cos(2\omega t + \varphi) + \dots \\ A_2 &= C_{20} + C_{21} \cos(\omega t + \alpha) + C_{22} \cos(2\omega t + \beta) + \dots \end{aligned} \tag{5.1}$$

Будем полагать, что пластина под действием потока совершает квазигармонические колебания по первой моде, $|C_{10b}| |C_{12}| \ll |C_{11}|$, и возбуждает резонансные колебания по второй моде на удвоенной частоте, $|C_{20b}| |C_{21}| \ll |C_{22}|$.

Подставляя это решение в уравнения (4.1) и приравнивая коэффициенты при всевозможных синусах и косинусах, получим систему уравнений для определения амплитуд, частот и сдвигов фаз. Из соотношений при косинусах понадобятся уравнения для амплитуд основных гармоник в первом приближении, решение которых имеет вид



Фиг. 3

$$C_{11}^2 = \frac{12}{5\kappa_1} \left(\left(1 - \frac{8}{3}\eta_2 \right) \omega^2 - \left(\omega_{01}^2 - \frac{2}{3}\eta_2 \omega_{02}^2 \right) \right) \quad (5.2)$$

$$C_{22}^2 = \frac{12}{5\kappa_2} \left(\left(4 - \frac{2}{3}\eta_1 \right) \omega^2 - \left(\omega_{02}^2 - \frac{2}{3}\eta_1 \omega_{01}^2 \right) \right)$$

и выражение для амплитуды отклонения C_{20} во втором приближении

$$C_{20} = - \frac{\eta_2 C_{11}^2 C_{22} \cos \beta}{6C_{22}^2 + 2\eta_2 C_{11}^2 + 4\omega_{02}^2 / \kappa_2} \quad (5.3)$$

Уравнения, вытекающие из равенств коэффициентов при синусах основных гармоник, во втором приближении выглядят так:

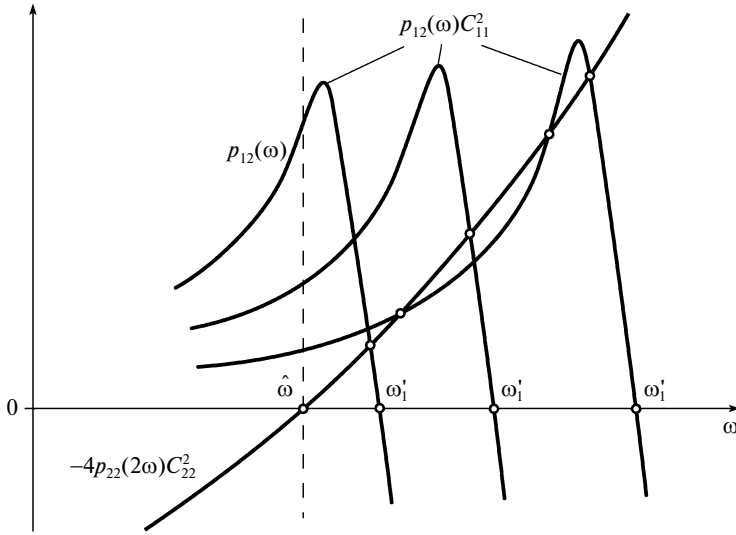
$$2p_{12}(\omega)\omega = \kappa_1 \eta_1 C_{20} C_{22} \sin \beta \quad (5.4)$$

$$4p_{22}(2\omega)\omega C_{22} = -\frac{1}{2} \kappa_1 \eta_1 C_{11}^2 C_{20} \sin \beta \quad (5.5)$$

Из них, в частности, следует уравнение баланса энергии

$$p_{12}(\omega)C_{11}^2 + 4p_{22}(2\omega)C_{22}^2 = 0 \quad (5.6)$$

физический смысл которого состоит в следующем: количество энергии, передаваемое от потока к пластине через первую моду за один период колебаний, равно количеству энергии, передаваемой пластиной назад в поток через вторую моду. Суммарная работа потока над пластиной за период колебаний, согласно равенству (4.7), равна нулю.



Фиг. 4

Система уравнений для определения амплитуд, частоты и фазы β состоит из уравнений (5.2), (5.3), (5.4), (5.6). Уравнения, вытекающие из равенств коэффициентов при косинусах и синусах субгармоник и постоянного отклонения C_{10} , однородны и имеют решение $C_{10} = C_{12} = C_{21} = 0$.

Докажем, что при возникновении резонанса по второй моде, но до возникновения нерезонансных многочастотных колебаний, при достаточно малых μ возникает устойчивый предельный цикл. До возникновения резонанса $C_{22} = 0$, а амплитуда C_{11} определяется выражением (3.2) – пластина совершает одночастотные колебания, $\omega = \omega_1'$. Резонансное решение возникает при частоте $\omega_1' > \hat{\omega}$, когда правая часть второго равенства (5.2) становится положительной; здесь

$$\hat{\omega} = \sqrt{\left(\omega_{02}^2 - \frac{2}{3}\eta_1\omega_{01}^2\right)\left(4 - \frac{2}{3}\eta_1\right)^{-1}}$$

В этом случае существует предельный цикл с промежуточной частотой. Действительно, при $\omega = \hat{\omega}$ левая часть уравнения (5.6) положительна, при $\omega = \omega_1'$ – отрицательна; таким образом, при некоторой частоте $\omega \in (\hat{\omega}, \omega_1')$ условие (5.6) выполнено.

На фиг. 3 показано взаимное расположение кривых C_{11} , C_{22} , $p_{12}(\omega)$ и $p_{22}(2\omega)$ на отрезке $[\hat{\omega}, \omega_1']$, на фиг. 4 – графическое решение уравнения (5.6) при разных значениях ω_1' .

Далее, при достаточно малом μ существует решение β уравнения (5.4). Действительно, правая часть не зависит от μ , а левую часть всегда можно сделать сколь угодно малой, взяв достаточно малое μ . В результате, при малых μ уравнение (5.4) разрешимо относительно β , и предельный цикл с внутренним резонансом 1:2 существует.

Аналогично доказывается, что резонансный предельный цикл возникает при фиксированном μ , если амплитуда C_{22} становится достаточно большой. Заметим, что при фиксированном μ и достаточно малой амплитуде C_{22} уравнение (5.4) не имеет реше-

ний β . Это означает, что резонансный предельный цикл возникает не при $M = \hat{M}$, где $\omega_1^*(\hat{M}) = \hat{\omega}$, а при большем M , причем он сразу имеет конечную амплитуду C_{22} .

Докажем теперь, что построенный предельный цикл при малых μ устойчив. Во-первых, рассмотрим отклонение одной из частот от соотношения 1:2. По отношению к уравнению, описывающему колебания по второй моде при $a_{12} = 0$, возбуждение этого резонанса — параметрический резонанс, вызванный наличием второго слагаемого во втором уравнении (4.1). Как известно ([12], §17), при фиксированном коэффициенте нелинейности и демпфировании, стремящемся к нулю, параметрический резонанс устойчив. Другими словами, при малых μ отклонение одной из частот от отношения 1:2 автоматически “исправится” с течением времени — происходит синхронизация частот. Таким образом, можно считать, что это отношение фиксировано, а амплитуды, соответственно, жестко связаны с частотой уравнением (5.2).

Теперь рассмотрим малое изменение частоты ω , без изменения соотношения 1:2. В силу равенства (4.7) изменение полной энергии пластины за период колебаний в первом приближении — это левая часть уравнения (5.6). Увеличим частоту предельного цикла ω (что приведет к увеличению амплитуд обеих гармоник). Тогда по построению левая часть (5.6) станет отрицательной, т.е. произойдет отток энергии колебаний от пластины в поток — возврат на предельный цикл. Если же уменьшить частоту предельного цикла (уменьшить амплитуды), то пластина начнет получать энергию из потока — снова возврат на предельный цикл.

Подчеркнем, что устойчивость резонансного предельного цикла вызвана тем, что амплитуды двух гармоник в силу устойчивости параметрического резонанса жестко связаны с частотой уравнением (5.2) и не могут возбуждаться по отдельности. В случае же одночастотных колебаний по второй моде рост возмущения по первой моде (разд. 4) был вызван тем, что ее вообще возможно возбудить отдельно от второй моды, по которой уже происходят колебания.

В приведенном доказательстве устойчивости рассматривались только возмущения частот и амплитуд, с сохранением периодичности движения. Устойчивость по отношению к произвольному малому возмущению требует существенно более сложного анализа, связанного с тем, что для произвольного непериодического возмущения нестационарное давление газа уже нельзя свести к аэродинамическому демпфированию и вообще к какой-либо дифференциальной связи возмущения давления газа и прогиба пластины. Однако в случае растянутой пластины в условиях одномодового флаттера (т.е. слабого влияния потока на динамику пластины) начальная стадия развития неустойчивости предельного цикла, по-видимому, всегда проявляется только в виде постепенной эволюции предельного цикла, что эквивалентно рассмотренному малому изменению частот или амплитуд.

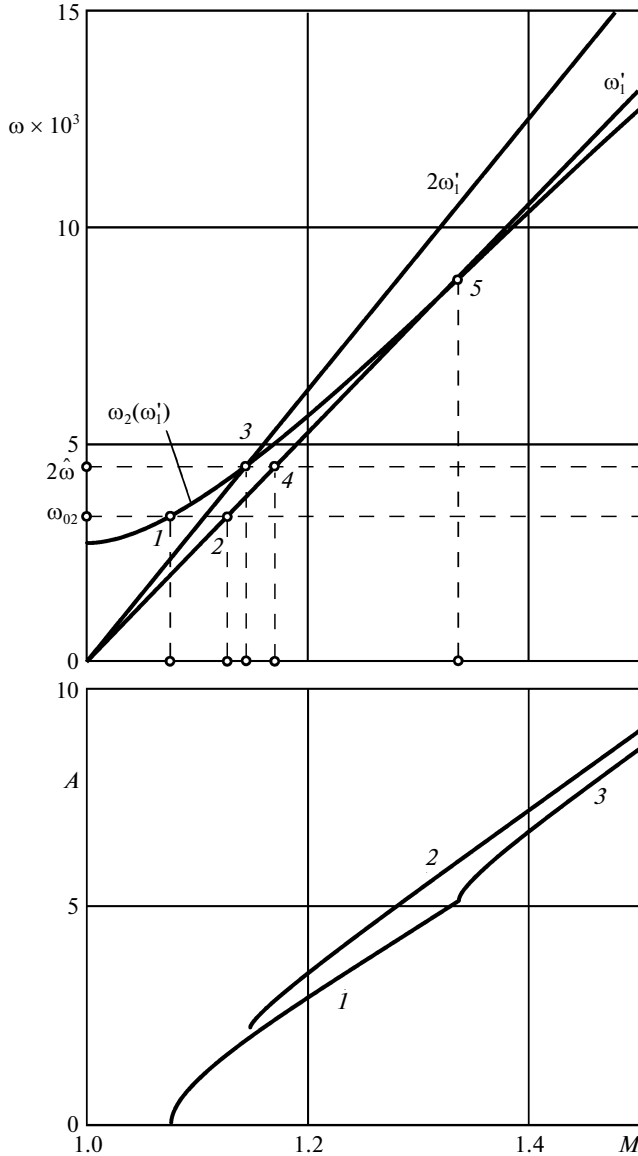
Оценим, как эволюционирует этот предельный цикл при дальнейшем увеличении числа Маха. При шарнирном опирании

$$a_{11} \approx 6.979/L^{5/2}, \quad a_{22} \approx 27.915/L^{5/2}$$

и при защемлении

$$a_{11} \approx 8.699/L^{5/2}, \quad a_{22} \approx 32.587/L^{5/2}$$

В обоих случаях (а следовательно, и для “промежуточных” типов граничных условий) коэффициент при ω^2 во втором равенстве (5.2) больше, чем в первом. Таким образом, с увеличением частоты после возникновения резонанса амплитуда второй моды растет быстрее, чем первой. При этом значение $p_{12}(\hat{\omega})$ с увеличением M сначала резко растет, а затем уменьшается (см. фиг. 2), а величина $p_{22}(2\hat{\omega})$ остается примерно посто-



Фиг. 5

янной. Поэтому после возникновения резонанса существует один устойчивый предельный цикл, частота лежит на отрезке $[\hat{\omega}, \omega_1']$ ближе к правому концу ω_1' (фиг. 4). При достаточном увеличении M появляются еще два резонансных предельных цикла, поскольку возникают две дополнительные точки пересечения графиков на фиг. 4. При этом цикл, соответствующей средней точке пересечения, неустойчив; таким образом, имеются два устойчивых резонансных предельных цикла. Частота “нового” предельного цикла лежит ближе к левому концу отрезка $\hat{\omega}$ — он соответствует меньшей частоте

те и амплитуде. При малых μ исходный предельный цикл не исчезает, так как максимум $p_{12} \sim \mu^{2/3}$, а $p_{22} \sim \mu$, т.е. максимум $p_{12}(\omega)C_{11}^2$ на фиг. 4 всегда больше, чем $-p_{22}(\omega)C_{22}^2$.

Так происходит до тех пор, пока частота $\omega_2'(M)$ не достигнет значения $2\hat{\omega}$. При $\omega_2'(M) > 2\hat{\omega}$ частота более слабого резонансного цикла (если он успел появиться) увеличивается: левая часть уравнения (5.6) по-прежнему отрицательна при $\omega = \omega_1'$, но положительна уже не только при $\omega = \hat{\omega}$, но и при $\omega = \omega_2'/2$, поскольку $\omega_2 < 2\omega_1$. Поэтому частота “слабого” резонансного цикла лежит в интервале $\omega_2'/2 < \omega < \omega_1'$.

Суммируем полученные результаты. В верхней части фиг. 5 показано расположение кривых, описывающих колебания по второй моде: частота нерезонансного предельного цикла $\omega_2'(M)$, удвоенная частота нерезонансного цикла первой моды $2\omega_1'(M)$ и частота малых колебаний по второй моде при развитых нерезонансных колебаниях по первой моде $\omega_2(\omega_1'(M))$ (решение первого уравнения (4.2), $j = 2$ при $C_{21} = 0$). Пластина заземлена, приняты значения параметров (4.6) и $M_w = 0$, что соответствует отсутствию натяжения пластины. При $1 < M < 1.08$ пластина устойчива. При $M \approx 1.08$ (точка 1) первая мода становится растущей, и возникает нерезонансный предельный цикл с частотой колебаний $\omega_1'(M)$. При $M \approx 1.13$ (точка 2) вторая мода становится растущей, но соответствующего ей устойчивого предельного цикла не возникает (разд. 4). При $M \approx 1.14$ (точка 3) частота $\omega_1'(M)$ сравнивается с половиной частоты малых колебаний по второй моде, и возникает второй устойчивый цикл — резонансный предельный цикл 1:2. Начиная с $M \approx 1.17$ (точка 4) частота и амплитуда второго резонансного цикла (если он успел возникнуть) начинают расти. При $M \approx 1.34$ (точка 5) нерезонансный цикл по первой моде становится неустойчивым, и вместо него возникает нерезонансный двухчастотный предельный цикл по двум первым модам. Начиная с этого момента имеется два устойчивых предельных цикла, состоящих из двух мод — нерезонансный и резонансный.

В единственном случае — при шарнирном опирании, когда $\omega_2'(M) = 2\omega_1'(M)$, — точки 3, 4 и 5 совпадают. В этом случае резонансный предельный цикл совпадает с нерезонансным.

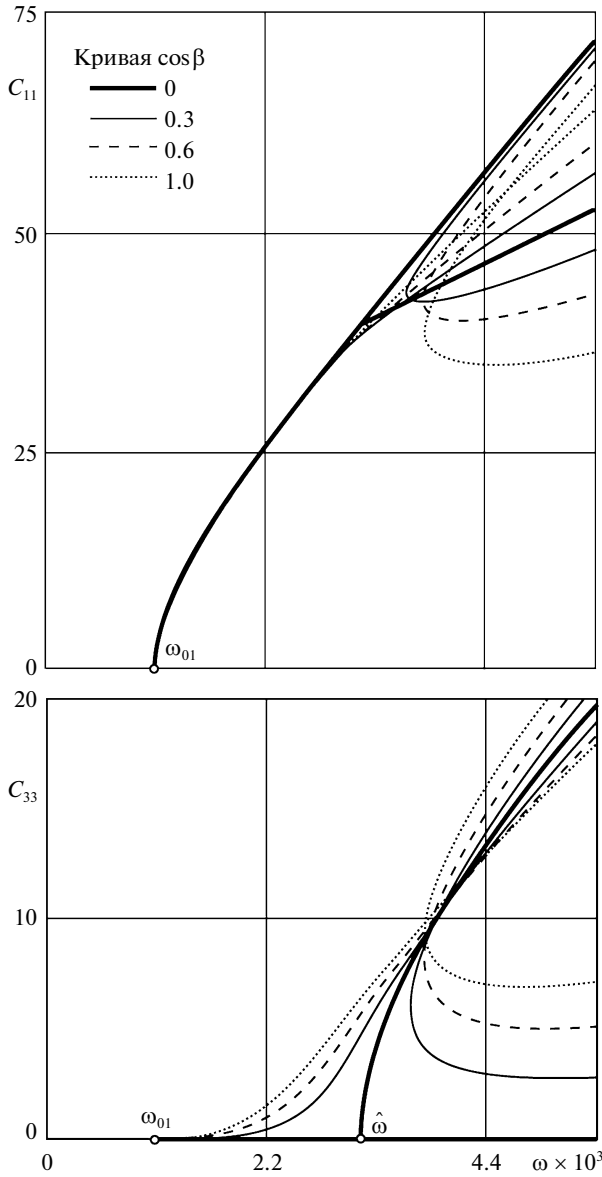
Отнесенные к толщине пластины амплитуды соответствующих предельных циклов $A = \sqrt{2/L(C_{11} + C_{22})}$ показаны для заземленной пластины в нижней части фиг. 5. Кривая 1 — одночастотный цикл, 2 — резонансный цикл 1:2, 3 — нерезонансный двухчастотный цикл. Как видно, наибольшую амплитуду имеет резонансный предельный цикл.

б. Многочастотные колебания с нечетным внутренним резонансом. В отличие от четного резонанса, даже в случае наиболее простого нечетного резонанса, 1:3, аналитическое исследование связано с трудностями, поскольку уравнения для амплитуд основных гармоник содержат сдвиг фаз, который должен определяться из уравнений, содержащих аэродинамическое усиление. Получается система четырех неразделяющихся нелинейных алгебраических уравнений, решения которой ведут себя довольно сложным образом. В связи с этим далее поведение предельного цикла исследуется качественно.

Для определенности будем считать, что в резонанс вступили 1-я и 3-я моды. Ищем решение в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{11} \cos \omega t + C_{13} \cos(3\omega t + \varphi) + \dots \\ A_3 &= C_{31} \cos(\omega t + \alpha) + C_{33} \cos(3\omega t + \beta) + \dots \end{aligned} \quad (6.1)$$

Система уравнений получается из системы (4.1) заменой индекса 2 на 3. Будем полагать, что пластина под действием потока совершает квазигармонические колебания



Фиг. 6

по первой моде, $C_{13} \ll C_{11}$, которые возбуждают резонансные колебания третьей моды на утроенной частоте, $C_{31} \ll C_{33}$.

Подставив (6.1) в систему уравнений, выпишем уравнения при косинусах – уравнения для амплитуд, и при синусах – уравнения для сдвигов фаз. В уравнениях для основных амплитуд C_{11} и C_{33} (которые получаются из соотношений при $\cos \omega t$ в уравнении для A_1 и $\cos(3\omega t + \beta)$ в уравнении для A_2) оставим только главные члены. Получим

$$C_{11}^3 + \frac{2}{3}\eta_1 C_{33}^2 C_{11} + \xi_1 C_{33} C_{11}^2 \cos \beta = \frac{4(\omega^2 - \omega_{01}^2)}{3\kappa_1} C_{11} \quad (6.2)$$

$$\frac{2}{3}\eta_3 C_{11}^2 C_{33} + C_{33}^3 + \frac{1}{3}\xi_3 C_{11}^3 \cos \beta = \frac{4(9\omega^2 - \omega_{03}^2)}{3\kappa_3} C_{33}$$

Здесь

$$\eta_j = (a_{11}a_{33} + 2a_{13}^2)/a_{jj}^2, \quad \xi_j = a_{11}a_{13}/a_{jj}^2, \quad \kappa_j = Ka_{jj}^2$$

В отличие от решения (5.2), в уравнениях появились члены с $\cos \beta$, существенные уже в первом приближении. Уравнения для субгармоник выражают C_{13} и C_{31} через основные амплитуды; они далее не понадобятся.

Перейдем к уравнениям, которые получаются приравнованием коэффициентов при синусах основных гармоник, оставив только главные члены:

$$2p_{12}(\omega)\omega = \frac{3}{4}\kappa_1\xi_1 C_{11}C_{33} \sin \beta \quad (6.3)$$

$$6p_{32}(3\omega)\omega C_{33} = -\frac{1}{4}\kappa_1\xi_1 C_{11}^3 \sin \beta \quad (6.4)$$

Отсюда, в частности, следует

$$p_{12}(\omega)C_{11}^2 + 9p_{32}(3\omega)C_{33}^2 = 0 \quad (6.5)$$

что выражает следующее: количество энергии, передаваемое от потока к пластине через первую моду за период колебаний, равно количеству энергии, передаваемой пластиной назад в поток через третью моду. Суммарная работа потока над пластиной за период колебаний равна нулю в силу равенства (4.7).

Уравнения, следующие из приравнования коэффициентов при $\sin(3\omega t + \varphi)$ в уравнении для A_1 и $\sin(\omega t + \alpha)$ в уравнении для A_3 , служат для определения сдвигов фаз α и φ и всегда имеют решение.

Главная трудность, как было сказано выше, заключается в том, что система (6.2) содержит сдвиг фазы β , который определяется из уравнения (6.3). Численные решения системы (6.2) при разных значениях $\cos \beta$ показаны на фиг. 6 (зашемленная пластина, $D = 19.78$, $M_w = 0$, $L = 300$). Пусть частота ω_1 превышает резонансную частоту $\hat{\omega}$, соответствующую $\cos \beta = 0$, и система (6.2) имеет решения C_{11} , C_{33} . Совершенно аналогично случаю резонанса 1:2 доказывается, что уравнение (6.5) имеет корень ω — частоту колебаний резонансного предельного цикла. Тогда из (6.3) определяется фаза β , которую можно сделать равной $\pm\pi/2$ путем подходящего выбора μ . Решение “самосогласовывается” в том смысле, что полученный набор величин C_{11} , C_{33} , ω , $\beta = \pm\pi/2$ при выбранном значении μ удовлетворяет системе уравнений (6.2), (6.3), (6.5).

Зафиксируем это значение μ и, увеличив число Маха M , несколько изменим частоту цикла и, соответственно, амплитуды. Вблизи резонансной частоты $\hat{\omega}$ скорость изменения $C_{33}(\omega)$ бесконечна (так как $C_{33}(\omega) \sim \sqrt{\omega - \hat{\omega}}$); следовательно, скорость изменения правой части (6.3) при $\sin \beta = 1$ также бесконечна, а левой — конечна. Получаем, что при $\beta = \pm\pi/2$ уравнение (6.3) не может быть удовлетворено, следовательно, его решение $\beta \neq \pm\pi/2$. Как видно на фиг. 6, при этом вместо одного резонансного решения образуются три. Однако не все они всегда могут удовлетворить уравнениям (6.3), (6.5).

Численное исследование системы (6.2), (6.3), (6.5) показывает, что, в зависимости от значений параметров μ и M , увеличение M может привести как к переходу единственного резонансного решения на ветвь на фиг. 6, имеющую наименьшую амплитуду (резонансный предельный цикл остаётся единственным), так и к образованию одновременно трёх резонансных предельных циклов.

7. Заключение. Показано, что нелинейные колебания пластины при одномодовом флаттере могут иметь разные предельные циклы – нерезонансные, при которых колебания по каждой моде происходят так, чтобы не совершать энергообмена с потоком, и резонансные, при которых энергия передается от потока к одной моде пластины, затем через нелинейную связь эта энергия передается другой моде, которая затем передает ее обратно в поток.

В случае неустойчивости по одной моде есть единственный устойчивый предельный цикл, его частота определяется условием равенства нулю работы, совершаемой давлением газа на периоде колебания. Его амплитуда вычисляется по частоте из обычных уравнений нелинейных колебаний пластины в вакууме. То есть одномодовые флаттерные колебания пластины в потоке можно представлять как свободные нелинейные колебания в вакууме с заданной частотой растущей в линейном приближении моды. Получена явная зависимость амплитуды и частоты предельного цикла от параметров задачи.

При увеличении скорости потока и появлении второй растущей в линейном приближении моды некоторое время единственным устойчивым нерезонансным предельным циклом по-прежнему является цикл, состоящий только из первой моды. Требуется еще большая скорость, чтобы возник нерезонансный предельный цикл, состоящий из обеих мод, при этом цикл, состоящий из одной моды, становится неустойчивым.

При тех же параметрах задачи могут существовать другие устойчивые предельные циклы, при которых две или более моды находятся во внутреннем резонансе, обмениваясь энергией, как описано выше. Существование такого цикла доказано на примере внутреннего резонанса 1:2. В случае резонанса 1:3 области существования и устойчивости такого предельного цикла устроены сложнее. Амплитуда колебаний при резонансном предельном цикле больше, чем при нерезонансных. Резонансные циклы, таким образом, более опасны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00034) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1303.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Garric I.E., Reed W.H.* III. Historical development of aircraft flutter // *J. Aircraft.* 1981. V. 18. № 11. P. 897–912.
2. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // *ПММ.* 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
3. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. *Алгазин С.Д., Куйко И.А.* Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // *ПМТФ.* 2003. Т. 44. № 4. С. 35–42.
5. *Веденев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. № 5. С. 155–169.
6. *Vedenev V.V.* Panel flutter at low supersonic speeds // *J. Fluids and Structures.* 2012. V. 29. P. 79–96.

7. Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е. Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161–175.
8. Веденеев В.В. Нелинейный высокочастотный флаттер пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 197–208.
9. Bendiksen O.O., Davis G.A. Nonlinear traveling wave flutter of panels in transonic flow // AIAA Paper 95-1486. 1995. 17 p.
10. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
11. Stoker J.J. Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. N.Y., L.: Interscience, 1950 = Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 264 с.
12. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1958. 410 с.
13. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

Москва
e-mail: vasily@vedeneev.ru

Поступила в редакцию
18.I.2012