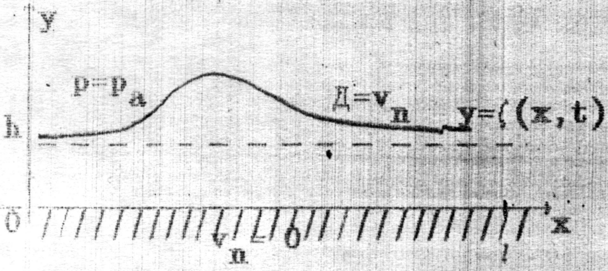
Лекция

Нелинейные длинные волны с учетом дисперсии.

Уединенная волна.



Уединенная волна наблюдалась Расселом в 1834 г.
Постановка задачи: задача плоская, течение потенциальное

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (0)$$

На свободной поверхности $y = \zeta(x,t)$ $\quad p = p_a$, $Д = v_n$; на дне $v_n = 0$.

l – характерная длина волны, h – глубина, $\mu = \frac{h}{l} << 1$.

Решение ищется в виде $\begin{cases} \varphi = \varepsilon l\sqrt{gh}\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(\xi,\tau)\eta^{2n}, \\ \zeta = h(1+\varepsilon\sigma(\xi,\tau)) \end{cases}$

$\zeta/x \sim h/l$ – малый параметр

где $\xi = \frac{x}{l}$, $\eta = \frac{y}{h}$, $\tau = \frac{\sqrt{gh}}{l}\cdot t$, $\varepsilon << 1$.

$\frac{\zeta - h}{h}$ – малый параметр

$$(0)\quad \Delta\varphi = 0 \Rightarrow \mu^2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{\xi\xi}}\eta^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)u_n\eta^{2(n-1)} = 0$$

$$\Rightarrow u_n = (-1)^n u_0^{(2n)}\frac{\mu^{2n}}{(2n)!}$$

На свободной поверхности $\begin{cases} Д = v_n \\ p = p_a \end{cases}$ из интеграла Коши–Лагранжа $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \varphi_x\zeta_x - \varphi_y\big|_{y=\zeta} = 0 & (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\big|_{y=\zeta} + g\zeta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\quad \varepsilon\mu^2(\sigma_\tau + \sigma_\xi\cdot\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_\xi}(1+\varepsilon\sigma)^{2n}) = \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty} 2nu_n(1+\varepsilon\sigma)^{2n-1} \Rightarrow$$

гл. член

$$\sigma_\tau + \varepsilon\sigma_\xi u_{0_\xi} = -u_{0_{\xi\xi}}(1+\varepsilon\sigma) + \frac{1}{6}\mu^2 u_{0_{\xi\xi\xi\xi}} + \bar{\bar{o}}(\varepsilon,\mu^2)$$

$$(2)\quad \varepsilon\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_\tau}(1+\varepsilon\sigma)^{2n} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_\xi}(1+\varepsilon\sigma)^{2n}\right)^2 + \frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2nu_n(1+\varepsilon\sigma)^{2n-1}\right)^2\right)$$

$$+ 1 + \varepsilon\sigma = 0$$

гл, член $\Longrightarrow$

$$u_{o_\tau} - \frac{\mu^2}{2} u_{o_{\xi\xi\tau}} + \frac{\varepsilon}{2} u_{o_\xi}^{\ 2} + \sigma + \frac{1}{\varepsilon} = \bar{\bar{o}}(\varepsilon, \mu^2)$$

Введем $V = u_{o_\xi}$ и продифференцируем (2) по ξ:

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_\tau + (V(1+\varepsilon\sigma))_\xi = \frac{\mu^2}{6} V_{\xi\xi\xi} \\ V_\tau + \varepsilon V V_\xi + \sigma_\xi = \frac{\mu^2}{2} V_{\xi\xi\tau} \end{array}\right| \text{уравнения Буссинеска}$$

Смысл $\varepsilon\sqrt{gh}\cdot V$ – скорость на дне, $y = h(1+\varepsilon\sigma)$ – форма свободной поверхности.

Предельные случаи:

1) $\varepsilon \ll \mu^2$ – линейная теория волн малой амплитуды с небольшой дисперсией

2) $\mu^2 \ll \varepsilon$ – нелинейная теория мелкой воды без дисперсии.

Газодинамическая аналогия в безразмерном виде: $1+\varepsilon\sigma \to \rho$, $\varepsilon V \to v$, $\frac{(1+\varepsilon\sigma)^2}{2} \to p = \frac{\rho^2}{2}$

Пусть $\varepsilon \sim \mu^2 \to 0$, главное приближение $\sigma_\tau + V_\xi = 0$

$$V_\tau + \sigma_\xi = 0$$

Рассмотрим решение типа волны, бегущей вправо, с нулевыми условиями при $\xi \to \pm\infty$: $\sigma = V_0(\xi - \tau)$, $V_0(\pm\infty) = 0$.

Следующее приближение строится в виде $\begin{cases} \sigma = V_0(\xi - \tau, \varepsilon\tau) + \varepsilon\sigma_1 \\ V = V_0(\xi - \tau, \varepsilon\tau) + \varepsilon V_1 \end{cases}$

где σ_1, $V_1 || \xi - \tau = \chi, \varepsilon\tau$.

$$\text{Главные члены:} \left\{\begin{array}{l} \sigma_{1\chi} - V_{1\chi} = V_{0(\varepsilon\tau)} + (V_0^{\ 2})_\chi - \frac{\mu^2}{6\varepsilon} V_{0\chi\chi\chi} \\ -V_{1\chi} + \sigma_{1\chi} = -V_{0(\varepsilon\tau)} - V_0 V_{0\chi} - \frac{\mu^2}{2\varepsilon} V_{0\chi\chi\chi} \end{array}\right| \text{Вычтем.}$$

Условие совместности уравнений для σ_1 и V_1 есть

$$\frac{\partial V_0}{\partial(\varepsilon\tau)} + \frac{3}{2} V_0 \frac{\partial V_0}{\partial\chi} + \frac{\mu^2}{6\varepsilon} \frac{\partial^3 V_0}{\partial\chi^3} = 0 \text{ – уравнение Кортевега–де Вриза.}$$

Рассмотрим решение типа бегущей волны уравнения Кортевега–де Вриза:

$$\begin{cases} V_0 = V_0(\chi - \varepsilon\tau\cdot C), \quad C = \text{const} \\ V_0(\pm\infty) = 0 \text{ со всеми производными} \end{cases}$$

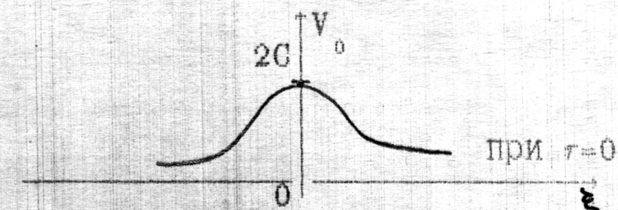
$$\Rightarrow \left(-C + \frac{3}{2}V_0\right)V_0' + \frac{\mu^2}{6\varepsilon}V_0''' = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\mu^2}{6}V_0'' + V_0\left(-C + \frac{3}{4}V_0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2}{12\varepsilon}\cdot V_0'^2 = C\frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^3}{4}$$

$$\sqrt{6\varepsilon}(\chi - C\varepsilon\tau) = \pm\mu\cdot\int\frac{dV_0}{V_0\sqrt{C - \frac{V_0}{2}}} = \mp\frac{2\mu}{\sqrt{C}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{1 - \frac{V_0}{2C}} + C_1$$

Сдвигом χ можно сделать $C_1 = 0$. В случае $C < 0$ не получается ограниченного решения $(\mathrm{th} \to \mathrm{tg})$. $V_0 \le 2C$, $C > 0$.

$$V_0 = \frac{2C}{\mathrm{ch}^2\,\frac{\sqrt{6\varepsilon C}}{2\mu}\,(\xi - \tau - C\varepsilon\tau)} > 0$$



Солитон или уединенная волна

Скорость движения солитона $(1 + \varepsilon C)\sqrt{gh} > \sqrt{gh}$, а по линейной теории $\sqrt{gh}\left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right) < \sqrt{gh}$.

Форма поверхности в исходных переменных не содержит t:

$$y = h\left(1 + \frac{2\varepsilon C}{\mathrm{ch}^2\,\frac{\sqrt{6\varepsilon C}}{2h}\,(x - t\sqrt{gh}\,(1 + \varepsilon C)}\right.$$, причем $2\varepsilon Ch = A$ – высота волны

Солитон большей высоты круче по форме и движется быстрее.

Решение уравнения Кортевега–де Вриза для n солитонов:

$$V_0 = \frac{2\mu^2}{3\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\ln\det A, \text{ где } A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\beta_i}{\varkappa_i + \varkappa_j}e^{(\varkappa_i + \varkappa_j)\chi - \frac{4\mu^2}{3\varepsilon}\varkappa_i^3(\varepsilon\tau)}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

Большие солитоны обгоняют малые.