

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
по годовому спецкурсу "Лекции об алгебраических числах"
2022-2023, лектор проф. Ю.В. Нестеренко

1. Простые расширения. Степень расширения. Поведение степени в башнях расширений.
2. Теорема об эквивалентности конечности и конечной порожденности алгебраических расширений и ее следствия.
3. Алгебраическая замкнутость поля всех алгебраических чисел.
4. Теорема о примитивном элементе.
5. Лемма о продолжении вложений и ее следствия.
6. Нормальные расширения. Эквивалентность различных определений.
7. Группа Галуа нормального расширения и её свойства.
8. Характеристический многочлен числа, его связь с минимальным многочленом. Норма и след в алгебраических расширениях, их свойства.
9. Дискриминант совокупности чисел, его свойства. Взаимный базис.
10. Лемма о дискретных подгруппах в \mathbb{R}^n .
11. Теорема о том, что множество целых алгебраических чисел произвольного поля алгебраических чисел есть порядок.
12. Теоремы Бlichфельда и Минковского.
13. Существование в полном модуле чисел с заданными ограничениями на величину их сопряженных.
14. Теорема Дирихле о единицах. Гомоморфизм группы единиц в \mathbb{R}^{s+t} . Структура образа и ядра этого отображения.
15. Конструкция $s + t - 1$ независимых единиц.
16. Завершение доказательства теоремы Дирихле о единицах.
17. Квадратичные поля. Кольцо целых чисел квадратичного поля. Единицы.
18. Круговые поля. Фундаментальный базис. Дискриминант.
19. Максимальность простых идеалов. Свойство обрыва возрастающих цепочек идеалов.
20. Дробные идеалы. Умножение дробных идеалов. Существование обратного для нетривиальных дробных идеалов.
21. Существование и единственность разложения дробных идеалов в произведение простых.
22. Показатели и их свойства.
23. Норма идеала. Мультипликативность нормы.
24. Норма главного идеала.

25. Классы идеалов. Конечность группы классов идеалов.
26. Разложение целых рациональных чисел в произведение простых идеалов алгебраических числовых полей (Теорема Дедекинда).
27. Конечность множества простых чисел, разветвленных в конечном расширении поля рациональных чисел.
28. Теорема о делимости дискриминантов (условие Эйзенштейна).