

О законе Грама в теории дзета-функции Римана

Задача, которой будет посвящен доклад, связана с «нерегулярностью» в поведении нулей дзета-функции Римана в критической полосе. Суть ее заключается в следующем. На вещественной прямой выбирается некоторая монотонная неограниченная последовательность, называемая последовательностью точек Грама. Она представляет собой почти равномерную сетку, и поведение ее давно и хорошо изучено. На эту же прямую наносятся и ординаты всех комплексных нулей дзета-функции Римана. Оказывается, что «в среднем» и ординаты, и точки Грама ведут себя практически одинаково.

Естественно поставить вопрос: как сильно могут отличаться друг от друга n -я ордината и n -я точка Грама при неограниченном возрастании номера n ? В 1940-е гг. А.Сельбергом была введена «мера уклонения» Δ_n - разность между номером n ординаты нуля и номером промежутка Грама, ее содержащего. Если бы ординаты были распределены регулярно, то эта разность «почти всегда» была бы равна нулю. Однако Сельберг показал, что эта разность «почти всегда» отлична от нуля и, более того, ее среднее значение неограниченно возрастает с увеличением номера ординаты.

В докладе предполагается рассказать об одном обобщении результата Сельберга. Именно, речь пойдет о распределении произведений таких разностей, скажем, о распределении величин $\Delta_n \Delta_{n+1}$, $\Delta_n \Delta_{n+1} \Delta_{n+2}$, и т.д. Оказывается, что каждая из этих величин «для почти всех» n отлична от нуля. Кроме того, имеет место интересный эффект, который можно продемонстрировать на примере произведений $\Delta_n \Delta_{n+1}$ следующим образом. Естественно ожидать, что примерно в четверти случаев оба сомножителя будут положительны, в четверти случаев – оба отрицательны, в четверти случаев первый – отрицателен, второй – положителен, и, наконец, в четверти случаев – первый положителен, второй - отрицателен. На самом деле оказывается, что последняя ситуация невозможна в принципе, третья не наблюдается «почти никогда», но зато первые две встречаются примерно в половине случаев каждая.