"О неприводимости и группах Галуа обобщенных гипергеометрических уравнений"

В.А. Горелов.

В теории специальных функций рассматриваются обобщенные гипергеометрические уравнения

$$L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z)\,y \equiv \left(\prod_{j=1}^{q}(\delta+\lambda_j-1) - z\prod_{k=1}^{l}(\delta+\nu_k)\right) y = 0,$$

где $\delta = zd/dz$, $\vec{\nu} = (\nu_1,\ldots,\nu_l) \in \mathbf{C}^l$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\ldots\lambda_q) \in \mathbf{C}^q$.

Для $\vec{\mu},\vec{\eta} \in \mathbf{C}^n$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbf{Z}$. Запись $(\vec{\nu};\vec{\lambda}) \sim \gamma(\vec{\mu};\vec{\eta}) + \beta$ означает, что $\vec{\nu} \sim \gamma\vec{\mu} + \beta$, $\vec{\lambda} \sim \gamma\vec{\eta} + \beta$, где $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta,\ldots,\gamma\mu_n + \beta)$, $\gamma,\beta \in \mathbf{C}$.

Уравнение $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\,y = 0$ называется приводимым (линейно приводимым), если оно имеет решение $y \not\equiv 0$ такое, что $y, y', \ldots, y^{(q-1)}$ алгебраически (линейно) зависимы над $\mathbf{C}(z)$. Необходимые и достаточные условия линейной приводимости получены В.Х. Салиховым. Приводимость уравнений $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};z^{q-l})\,y = 0$ изучалась, в частности, в работах [1-3]. Необходимые и достаточные условия приводимости, кроме случая $q - l = 6$, $0 \le l \le 3$, установлены в работе [3]. Группы Галуа гипергеометрических уравнений вычислялись Н. Кацем [4]. Автором доказывается

Теорема. *Пусть* $\vec{\nu} \in \mathbf{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}^-)^q$, $q \ge \max(2, l+1)$, $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $p \in \mathbf{N}$. *Тогда линейно неприводимое дифференциальное уравнение* $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\,y = 0$ *является приводимым в том и только в том случае, когда* $q - l$ *- четно и* $(\vec{\nu};\vec{\lambda}) \sim X_0 + (\vec{\nu}_0;\vec{\lambda}_0)$, *где* $X_0 \in \mathbf{C}$, $\vec{\nu}_0, \vec{\lambda}_0$ *- вектора, совокупность компонент каждого из которых является объединением пар вида* $\{X, -X\}$, *где* $X \in \mathbf{C}$, *и одного из множеств* $\{0, 1/2\}$, $\{0\}$, $\{1/2\}$, $\emptyset$, *причем никакое из них не может выбираться одновременно для* $\vec{\nu}_0, \vec{\lambda}_0$.

Группа Галуа приводимого, но линейно неприводимого уравнения $L(\vec{\nu};\vec{\lambda};\alpha z^p)\,y = 0$ *изоморфна при нечетном* q *подгруппе группы* $SO(q,\mathbf{C})$, *а при четном* q *- группы* $Sp(q,\mathbf{C})$.

Лит.: [1] F. Beukers, W.D. Brownawell, G. Heckman, "Siegel normality", *Annals of Math*, **127** (1988), 279-308.
[2] F. Beukers, "Some new results on algebraic independence of E-functions", New advances in transcendence theory, Cambridge Univ. Press, 1988, 56-67.
[3] В. Х. Салихов, "Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций", *Acta Arith*, **53:**5 (1990), 453-471.
[4] N. M. Katz, *Exponential Sums and Differential Equations*, Ann. of Math. Stud., V. 124, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.