Старшие свертки

Шкредов И.Д.

Пусть $\mathbf{G}$ — произвольная абелева группа и $A \subseteq \mathbf{G}$ ее конечное подмножество. *Аддитивная энергия* множества A — это число решений уравнения

$$\mathsf{E}_2(A) = |\{a_1 - a_2 = a_3 - a_4 \ : \ a_1, a_2, a_3, a_4 \in A\}| \,.$$

Данная величина играет большую роль во многих задачах аддитивной комбинаторики и теории чисел. В докладе мы дадим обзор свойств следующего обобщения аддитивной энергии

$$\mathsf{E}_k(A) = |\{a_1 - a_2 = a_3 - a_4 = \dots = a_{2k-1} - a_{2k} \ : \ a_1, \dots, a_{2k} \in A\}| \,, \quad k \geqslant 2 \,.$$

С геометрической точки зрения $\mathsf{E}_k(A)$ — это число k–наборов декартового произведения A^k, лежащих на одной и той же прямой из семейства $y = x + c$, $c \in A - A$. Аналог $\mathsf{E}_3(A)$ для общих систем прямых и точек имеет применения в комбинаторной геометрии и задачах о суммах произведений. $\mathsf{E}_k(A)$ может быть выражена как k–й момент сверток характеристической функции множества A.

Старшие моменты сверток уже нашли несколько приложений. Мы рассмотрим дальнейшие свойства $\mathsf{E}_k(A)$, используя метод тригонометрических сумм, комбинаторный подход, а также связь между величинами $\mathsf{E}_k(A)$ и собственными числами некоторых операторов.