О больших значениях дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой

М.А. Королёв

Известно, что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ имеет на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ бесконечно много нулей, и вместе с тем принимает на этой прямой очень большие по модулю значения. Так, например, классический результат Р.Баласубраманияна (1978) утверждает, что на всяком промежутке вида $(T, T+H)$, длина H которого удовлетворяет неравенствам $\ln\ln T \ll H \leqslant T$, найдется точка t, для которой

$$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| \geqslant \exp\left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\ln H}{\ln\ln H}}\right).$$

Предполагается, что эта оценка близка к окончательной.

Ситуация становится совершенно иной при $0 < H \ll \ln\ln T$. В этом случае имеется лишь ряд нижних оценок вида

$$F(T;H) \;=\; \max_{|t-H|\leqslant H}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right| \geqslant f(T,H),$$

где f - некоторая убывающая (как правило, очень быстро) функция T, принадлежащих А.А. Карацубе, М.З. Гараеву, М.Е. Чанге. Из них, например, следует, что

$$F(T;H) \geqslant c_1 \;>\; 0 \tag{1}$$

при $H \geqslant \ln\ln T - c_2$, где c_1, c_2 - постоянные.

В связи с неравенством (1) А.А.Карацуба в 2006 году поставил задачу доказать оценку такого вида при H, существенно меньших $\ln\ln T$.

В докладе предполагается рассказать об условном (использующем гипотезу Римана) решении задачи А.А.Карацубы. Как кажется, основной интерес представляет не сам результат, а то, что его доказательство использует некоторые утверждения, «далёкие» от теории $\zeta(s)$ - некоторые факты из геометрии решёток, а также трансцендентность числа e^{π}.