Основные исследования в теории чисел можно условно сгруппировать по нескольким направлениям. Впрочем, обширность содержания не позволяет охватить при этом все многообразие результатов и методов теории чисел, значительную часть их пришлось опустить.

Исследования свойств простых чисел. Среди натуральных чисел выделяются так называемые простые числа. Множество их бесконечно. Асимптотический закон распределения простых чисел утверждает, что их количество в пределах от 1 до заданного числа x при $x \to +\infty$ асимптотически равно $\frac{x}{\ln x}$. Эта теорема была независимо доказана в 1896г. Ж. Адамаром и Ш.Ж. де ла Валле-Пуссеном. Вопросы распределения простых чисел в различных числовых последовательностях, например, среди значений фиксированного многочлена $f(n)$ составляют одну из проблем этого раздела теории чисел. Для многочленов первой степени она была решена в середине XIX века Г.П. Лежен Дирихле, однако и в настоящее время не доказана бесконечность множества простых чисел в последовательности $n^2 + 1, n \geq 1$. Исследование расстояний между соседними простыми числами в натуральном ряду составляет другой круг проблем этого направления. Среди нерешенных задач отметим, например, утверждение о бесконечности множества пар простых чисел p, q с условием $p - q = 2$, так называемую "проблему близнецов". С изучением свойств простых чисел тесно связаны исследования дзета-функции Римана $\zeta(s)$. В настоящее время на кафедре теории чисел свойства дзета функции изучают проф. Королёв М.А. и доц. Преображенская Т.А.

Аддитивные задачи. Здесь рассматриваются вопросы представимости целых чисел в виде сумм слагаемых определенного вида. Например, в 1770г. Ж. Лагранж установил, что каждое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Впоследствии (1909г.) Д.Гильберт обобщил это утверждение, заменив суммы квадратов суммами произвольных фиксированных степеней, решив тем самым знаменитую проблему Варинга. В 1930г. Л.Г.Шнирельману - впоследствии первому заведующему кафедрой теории чисел, удалось доказать, что каждое целое число большее 1 есть сумма не более чем $8 \cdot 10^5$ простых чисел. Это был первый шаг в решении проблемы Гольдбаха (предложена в 1742г.) о том, что каждое нечётное натуральное число, не меньшее 7 представимо в виде суммы трёх простых чисел. В 1937г. И.М. Виноградов доказал это утверждение для всех достаточно больших нечётных чисел. А в 2013г. Х.Гельфготт полностью решил проблему Гольдбаха. Отметим, что сформулированная Эйлером проблема о представимости всякого четного числа $n \geq 6$ в виде суммы двух нечетных простых чисел, она же бинарная проблема Гольдбаха, все еще далека от своего решения.

Диофантовы уравнения. Вопросы разрешимости уравнений в целых числах относятся к древнейшим в теории чисел. В связи с исследованиями в этой области нужно упомянуть имена Диофанта, Ферма и Эйлера. Теория сравнений, являющаяся важным инструментом исследования диофантовых уравнений была систематически разработана К.Ф.Гауссом. Теория алгебраических чисел, толчком к созданию которой послужили в первую очередь исследования уравнения Ферма $x^n + y^n = z^n, n \geq 3$, и в настоящее время приносит плоды в этой области. Знаменитая теорема Ферма была доказана в 1994г. Э. Уайлсом. Отметим, полученное в 2000г. П. Михайлеску решение проблемы Каталана (1844г.) о существовании у уравнения $x^y - z^t = 1$ единственного решения в целых числах $x > 1, y > 1, z > 1, t > 1$, а именно $3^2 - 2^3 = 1$.

Диофантовы приближения – раздел теории чисел о решении неравенств в целых числах, включает в себя теорию цепных дробей и другие алгоритмы построения приближений действительных чисел рациональными, а также ряд вопросов геометрии чисел. Большой вклад в эту область внёс А.Я. Хинчин. Среди наиболее ярких достижений отметим теорему К.Ф. Рота (1954г.) о том, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными и её многомерное обобщение - теорему В. Шмидта о подпространствах. Последние результаты имели многочисленные приложения к исследованию диофантовых уравнений. Среди нерешенных вопросов отметим знаменитую проблему Литтлвуда о том, что для любых действительных чисел α, β и любого положительного ε неравенство $|x| \cdot |x\alpha - y_1| \cdot |x\beta - y_2| < \varepsilon$ разрешимо в целых числах $x > 0, y_1, y_2$. Задачами из теории диофантовых приближений и их приложениями на кафедре теории чисел занимаются д.ф.м.н. О.Н. Герман, проф. Н.П. Долбилин, проф. Н.Г. Мощевитин, проф. Ю.В. Нестеренко.

Трансцендентные числа – раздел теории чисел, в котором исследуются вопросы иррациональности и трансцендентности действительных чисел. Как правило, это классические постоянные или значения аналитических функций. Неалгебраичность, т.е. трансценденость числа e была доказана в 1873г. Ш. Эрмитом, а трансцендентность числа π в 1882г. Ф.Линдеманом. Седьмая проблема Гильберта о трансцендентности чисел вида a^b, где a, b алгебраические числа, причём b иррационально, была в частных случаях $e^\pi = (-1)^{-i}$, $2^{\sqrt{2}}$ доказана в 1929г. А.О.Гельфондом и Р.О. Кузьминым. В 1934г. А.О. Гельфонд предложил новый метод и доказал утверждение Гильберта в общем виде. В том же году, но несколько позже, иное решение 7-й проблемы Гильберта опубликовал Т.Шнейдер. А.О. Гельфонд руководил кафедрой теории чисел с 1938 по 1968 годы. Гельфонд создал на кафедре школу специалистов в области теории трансцендентных чисел.

Предполагается, что любое число вида $P(e, \pi)$, где $P(x, y), P \neq 0$, - многочлен с целыми коэффициентами, трансцендентно, однако к настоящему времени не доказана даже иррациональность числа $e + \pi$. В 1996г. Ю.В. Нестеренко удалось доказать аналогичное утверждение (алгебраическую независимость) для чисел π и e^π. В период с 50-х по 90-е годы А.Б.Шидловскому удалось доказать общие результаты об алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках. Эти функции удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям произвольных порядков с коэффициентами - рациональными функциями от переменной z и в некотором смысле являются обобщениями экспоненциальной функции e^z. На кафедре теории чисел интенсивно ведутся исследования иррациональности значений дзета-функции Римана в нечётных точках $s \geq 3$ и других, связанных с ними чисел. Устанавливаются количественные характеристики в виде оценок мер иррациональности и линейной независимости таких чисел.

Нижние оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел, доказанные средствами теории трансцендентных чисел (А. Бейкер, 1967г.), играют важную роль при нахождении решений многих диофантовых уравнений. На кафедре такие исследования были начаты сразу же после решения 7-й проблемы Гильберта А.О. Гельфондом и впоследствии были продолжены Н.И.Фельдманом. Исследования в области теории трансцендентных чисел, ведущиеся на кафедре, получили широкое мировое признание и пользуются заслуженным авторитетом у специалистов. В настоящее время в этой области на кафедре работают проф. А.И. Галочкин, проф. Ю.В. Нестеренко, доц. Е.А. Уланский и асс. И.П. Рочев.

Теория чисел – один из древнейших математических разделов. Арифметические исследования послужили базой для создания ряда разделов математики и в то же время теория чисел использует аналитические, алгебраические, геометрические и многие другие методы для решения теоретико числовых проблем, ряд из которых ждал и ждет своего решения столетиями. Для доказательства все еще открытой гипотезы Римана о нулях дзета-функции использовались методы, развитые в теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, функциональном анализе. А доказательство асимптотического закона о распределении простых чисел впервые было получено методами комплексного анализа. Попытки решения проблемы Ферма, проблем распределения простых чисел стимулировали развитие ряда разделов алгебры.

Теория чисел безусловно относится к фундаментальным разделам математики. Вместе с тем ряд ее задач имеет самое непосредственное отношение к практической деятельности. Так, например, благодаря в первую очередь запросам криптографии и широкому распространению ЭВМ, исследования алгоритмических вопросов теории чисел переживают в настоящее время период бурного и весьма плодотворного развития. Криптографические потребности стимулировали исследования классических задач теории чисел, в ряде случаев привели к их решению, а также стали источником постановки новых фундаментальных проблем.