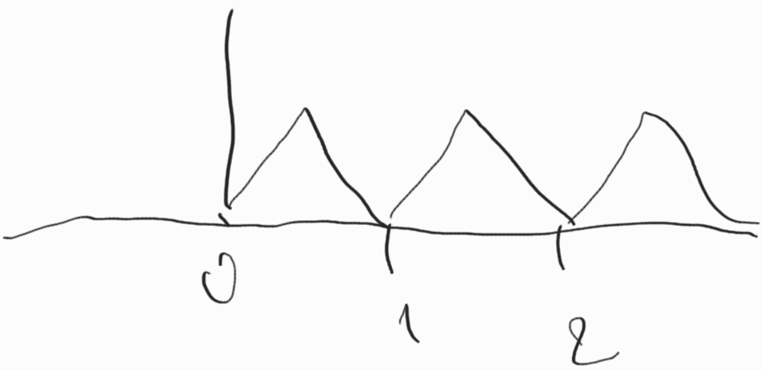
Николай Германович Мощевитин.

О проблемах (нерешенных)

Проблема Литтлвуда.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\|\xi\| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |\xi - a|$$



Гипотеза $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\inf_{q\in\mathbb{N}} q\,\|q\alpha\|\cdot\|q\beta\| = 0$$

$$f(q) = q\,\|q\alpha\|\cdot\|q\beta\|$$

Теор. Дирихле $\alpha \notin \mathbb{Q}$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$ $\exists$ беск. много $\frac{p}{q}$

$$\|q\alpha\| < \frac{1}{q}$$

$$\|q\beta\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\inf_q q\,\|q\alpha\| < 1 \leq 1$$

$$\inf_q \left(q\,\|q\alpha\|\right)\underbrace{\|q\beta\|} = 0$$

Для почти всех α, β гипотеза верна

Теор Пека: Если $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = \sqrt[3]{4}$

то гип Литтлвуда
Верна

$\boxed{\text{Для } \alpha = \sqrt{2} \quad \beta = \sqrt{3}}$

Неизвестно, верна ли гипотеза Литтлвуда.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\inf_q q \|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| \cdot \|q\gamma\| = 0$$

Гипотеза

Гипотеза для α, β, γ

$\alpha = \sqrt{2}, \ \beta = \sqrt{3}, \ \gamma = \sqrt{6}$

Верна.

$\|q\beta\|$

$q \|q\alpha\| < 1$

Проблема де-Матана, Теулье
Снерешенная

($\simeq$ p-адическая гипотеза Литтлвуда)

$$\inf_q q \cdot \|q\alpha\| \, |q|_p = 0$$

$$|q|_p = \frac{1}{p^\lambda}$$

p-число

Пусть $p^\lambda \mid q$, $p^{\lambda+1} \nmid q$

λ - показатель с которым p входит каноническое разложение q на множители

Теор α - квадр. ирр.

то p-гипотеза Литтлвуда верна.

Задача: доказать эту теорему

$\alpha \in \mathbb{R}$

p_1, p_2 — различные простые

Th $\inf_{q} q \|q\alpha\| \, |q|_{p_1} |q|_{p_2} = 0$

Следствие теоремы Фюрстенберга

p_1, p_2 — мульт. независимы

Целые числа

$p_1^{a_1} p_2^{a_2} = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\{ p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots \}$

$\lfloor p_1 \ p_2 \ \alpha \rceil \ a_1 \ a_2 \in \mathbb{N}$

в слоду плодли не $[\,9\,(\,]$

Гипотеза. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\exists$ б. н. $q \in \mathbb{N}$

$$q \mid [\alpha q]^2 + [\beta q]^2$$

$[\ ]\quad[\ ]$

$\lfloor\ \rfloor\quad\lceil\ \rceil$