В докладе будут рассказаны теоремы об асимптотических оценках поведения степенных рядов со значениями–коэффициентами арифметических функций при стремлении по радиусу к единичной окружности. Обозначим $e(\beta) = e^{2\pi i\beta}$. Например, для функции Мёбиуса справедливы следующие результаты. Пусть

$$\mathfrak{M}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) z^n$$

Теорема 1. *Для любого рационального β существует $a > 0$, что при $r \to 1-$*

$$\mathfrak{M}(re(\beta)) = \Omega((1-r)^{-a}). \tag{1}$$

Откуда следует результат о конечных суммах

Следствие 1. *Для любого $\beta \in \mathbb{Q}$ существует $a > 0$, что при $x \to +\infty$*

$$\sum_{n<x} \mu(n) e(n\beta) = \Omega(x^a). \tag{2}$$

Для рациональных β с небольшим знаменателями верно

Теорема 2. *Пусть $\beta = \frac{l}{q} \in \mathbb{Q}$ и $q \leq 100$, тогда при $r \to 1-$*

$$\mathfrak{M}(re(\beta)) = \Omega((1-r)^{-\frac{1}{2}}).$$

Откуда следует результат о конечных суммах

Теорема 3. *Пусть $\beta = \frac{l}{q} \in \mathbb{Q}$ и $q \leq 100$, тогда при $x \to +\infty$*

$$\sum_{n<x} \mu(n) e(n\beta) = \Omega(\sqrt{x}).$$

Для широких классов мультипликативных и аддитивных функций $\alpha(n)$ определяемых небольшим количеством ограничений имеет место следующий результат

Степенные ряды с коэффициентами $\alpha(n)$ не продолжаются за единичный круг ни в одной точке.

Для этих рядов также можно получить омега-оценки при стремлении аргумента по радиусу единичной окружности к корням из единицы.

В случае когда β иррационально для многих арифметических рядов можно получить оценки следующего типа. Пусть, например, $\mathfrak{M}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(n) z^n$ Тогда, если показатель иррациональности β равен 2, то

$$\mathfrak{M}_0(re(\beta)) = O_\beta(1-r)^{-10/11-\varepsilon}$$

В то же время, для любого δ можно найти иррациональные числа β, такие, что

$$\mathfrak{M}_0(re(\beta)) = \Omega(1-r)^{-1+\delta}.$$