$q$-экспоненциальная функция:

$$\mathrm{E}_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)} = 1 + \frac{z}{q-1} + \frac{z^2}{(q-1)(q^2-1)} + \cdots, \qquad |q| > 1.$$

Связь с обычной экспонентой:

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{E}_q\big((q-1)z\big) = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Функциональное уравнение и бесконечное произведение:

$$\mathrm{E}_q(qz) - \mathrm{E}_q(z) = z\,\mathrm{E}_q(z) \implies \mathrm{E}_q(qz) = (1+z)\,\mathrm{E}_q(z) \implies \mathrm{E}_q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{q^n}\right).$$

Рациональные значения в рациональных точках: $\mathrm{E}_q(0) = 1$, $\mathrm{E}_q(-q^n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

**Теорема 1** (Лотоцкий, 1943)**.** *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha \neq -q^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\mathrm{E}_q(\alpha) \notin \mathbb{Q}$.*

**Теорема 2** (можно сказать, что Bézivin, 1988)**.** *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Допустим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Q}^*$ удовлетворяют двум условиям:*

1) *$\alpha_j \alpha_k^{-1} \neq q^n$ при $j \neq k$, $n \in \mathbb{Z}$;*

2) *$\alpha_j \neq -q^n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

*Тогда числа*

$$1, \mathrm{E}_q(\alpha_1), \ldots, \mathrm{E}_q(\alpha_m), \mathrm{E}'_q(\alpha_1), \ldots, \mathrm{E}'_q(\alpha_m), \mathrm{E}''_q(\alpha_1), \ldots, \mathrm{E}''_q(\alpha_m), \ldots$$

*линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Аналогичные результаты, в том числе в количественной форме (с оценкой меры линейной независимости), доказаны и для функций более общего вида.

Проблемы:

1) Доказать аналогичные утверждения для произвольных $q \in \mathbb{Q}$, $|q| > 1$. (Известны результаты для «почти целых» $q$.)

2) Результаты о трансцендентности/алгебраической независимости.

Из теоремы Нестеренко о модулярных функциях следует трансцендентность некоторых значений (например, $\mathrm{E}_q(\pm 1)$ при алгебраическом $q$).

**Теорема 3** (Krattenthaler, Rochev, Väänänen, Zudilin, 2009)**.** *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. Тогда $\mathrm{E}_q(\alpha)$ не является квадратической иррациональностью.*