ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
на 2 потоке 4 курса механико-математического
факультета МГУ

1. Простейшие свойства делимости. Представление наибольшего общего делителя d чисел a и b в форме $d = au + bv$. Теорема о существовании и единственности разложения чисел на простые сомножители. Бесконечность множества простых чисел.

2. Лемма о равенстве верхних и нижних пределов функций $(\theta(x))/x$, $(\psi(x))/x$ и $(\pi(x)\ln x)/x$. Связь между асимптотическим поведением функции Чебышева $\psi(x)$ и сходимостью интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2}\, dx\,.$$

3. Оценки Чебышева функции $\pi(x)$. Оценки n-го простого числа. Расходимость ряда $\sum_p \frac{1}{p}$.

4. Аналитичность дзета-функции Римана в области $\sigma > 1$. Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической призводной. Представление дзета-функции в виде бесконечного произведения.

5. Преобразования Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область $\sigma > 0$.

6. Отсутствие нулей дзета-функции в области $\sigma \geq 1$.

7. Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел. Сведение его доказательства к исследованию некоторого комплексного интеграла.

8. Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. Асимптотическая формула n-го простого числа.

9. Простейшие свойства сравнений. Группа $(Z/mZ)^*$. Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Элементарные доказательства бесконечности множества простых чисел в прогрессиях вида $4n + 1$ и $4n + 3$.

10. Простейшие свойства мультипликативных функций. Явная формула для значений функции Эйлера, мультипликативность этой функции.

11. Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Вычисление сумм $\sum_{a\in G}\chi(a)$ и $\sum_\chi \chi(a)$ для характеров χ группы G. Определение и свойства числовых характеров.

12. Аналитичность функции Дирихле $L(s,\chi)$ в области $\sigma > 1$. Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Отсутствие нулей $L-$функции в области $\sigma > 1$. Представление $L-$функции в виде бесконечного призведения. Аналитическое продолжение функции $L(s,\chi_0)$ в область $\sigma > 0$.

13. Теорема о почленном дифференцировании ряда Дирихле. Область аналитичности функции $L(s,\chi)$ при $\chi \neq \chi_0$.

14. Теорема об области сходимости ряда Дирихле с неотрицательными коэффициентами.

15. Неравенство $L(1,\chi) \neq 0$ для действительного характера χ.

16. Неравенство $L(1,\chi) \neq 0$ при $\chi^2 \neq \chi_0$.

17. Доказательство теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

18. Свойства минимального многочлена алгебраического числа. Целые алгебраические числа. Лемма Гаусса и ее следствия, относящиеся к целым алгебраическим числам.

19. Формулировка основной теоремы о симметрических многочленах. Теорема о симметрическом многочлене от нескольких систем сопряженных алгебраических чисел. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.

20. Две теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями. Построение чисел, имеющих заданный порядок приближений.

21. Теорема Лиувилля о приближениии алгебраических чисел. Построение трансцендентных чисел при помощи теоремы Лиувилля.

22. Обобщение теоремы Лиувилля на многочлены от нескольких алгебраических чисел.

23. Теорема Бореля о характере приближений "почти всех"действительных чисел.

24. Иррациональность и трансцендентность числа e.

25. Иррациональность числа π.

26. Лемма Зигеля об оценках решений систем линейных уравнений с целыми коэффициентами.

27. Формулировка теоремы Линдемана. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Линдемана, оценки ее порядка нуля.

28. Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Линдемана. Ее связь с проблемой квадратуры круга.

29. Седьмая проблема Гильберта. Формулировка теоремы Гельфонда-Шнейдера. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера, оценки ее порядка нуля.

30. Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера.

Лектор

А.И.Галочкин