ВОПРОСЫ
К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

4 курс, 1 поток, 2020-2021 учебный год.

1) Оценки Чебышева для функции $\pi(x)$.
2) Определение функции $\zeta(s)$ и ее простейшие свойства в области $\Re s > 1$ (аналитичность, представление $\zeta'(s)$ и $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ в виде ряда Дирихле, отсутствие нулей).
3) Тождество Эйлера для $\zeta(s)$.
4) Аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в область $\Re s > 0$.
5) Отсутствие нулей у $\zeta(s)$ на прямой $\Re s = 1$.
6) Оценка сверху $\zeta(s)$ и $\zeta'(s)$ в области $1 \le \sigma \le 2$, $|t| \ge 3$.
7) Оценка $\left|\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ в области $1 \le \sigma \le 2$, $|t| \ge 3$.
8) Асимптотический закон распределения простых чисел. Функция Чебышева $\psi(x)$. Доказательство равенства $\psi(x) - \pi(x)\ln x = o(x)$ при $x \to \infty$. Сведение доказательства асимптотического закона к равенству $\omega(x) = x + o(x)$ для функции $\omega(x) = \int_1^x \dfrac{\psi(y)}{y} dy$.
9) Доказательство тождества

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \cdot \frac{x^s}{s^2} ds.$$

10) Выделение предполагаемого главного члена функции $\omega(x)$.
11) Оценка остаточного члена $\omega(x)$ и доказательство равенства $\omega(x) = x + o(x)$ при $x \to \infty$.
12) Построение характеров Дирихле.
13) Свойства характеров (вычисление сумм $\sum_{n=1}^m \chi(n)$ и $\sum_{\chi} \chi(n)$, доказательство неравенства $\left|\sum_{n=1}^x \chi(n)\right| \le m$ для неглавного характера).
14) L-функции Дирихле и их простейшие свойства в области $\Re s > 1$ (аналитичность, представление $L'(s,\chi)$ и $\dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$ в виде рядов Дирихле, отсутствие нулей).
15) Тождество Эйлера для L-функций, аналитическое продолжение L-функций в область $\Re s > 0$.
16) Доказательство утверждения $L(1,\chi) \ne 0$ для неглавных действительных характеров χ.
17) Доказательство утверждения $L(1,\chi) \ne 0$ для неглавных комплексных характеров χ.
18) Доказательство теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
19) Алгебраические числа. Замкнутость множества алгебраических чисел относительно арифметических операций.
20) Целые алгебраические числа. Замкнутость множества целых алгебраических чисел относительно сложения, вычитания и умножения.
21) Теорема о примитивном элементе. Степень конечного расширения.
22) Алгебраическая замкнутость множества алгебраических чисел.

23) Вложения конечного расширения поля рациональных чисел в **C**. Нормальные расширения. Группа Галуа.
24) Множество образов элемента при различных вложениях конечного расширения. Норма в алгебраическом расширении.
25) Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Иррациональность e.
26) Теорема Лиувилля о приближении рациональными числами алгебраических чисел. Иррациональность и трансцендентность числа $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$.
27) Трансцендентность числа e.
28) Иррациональность числа π.
29) Теорема Линдемана - Вейерштрасса. Следствия из неё. Сведение доказательства к предложению об экспоненциальной линейной форме.
30) Доказательство предложения об экспоненциальной линейной форме.

Лектор
профессор

Ю.В.Нестеренко