Обобщение одного тождества для интегралов гипергеометрического типа

Е. А. Уланский

Обозначим $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ и

$$\mathrm{I}_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}|z) \;=\; \prod_{i=1}^{m} \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \int\limits_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{a_i-1}(1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1 - z \cdot x_1 \cdots x_i)^{c_i}} \, d\bar{x}, \qquad (1)$$

где $z, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $|arg(1-z)| < \pi$ и $\Re(b_i) > \Re(a_i) > 0$, $c_i = 0$ либо $\Re(c_i) > 0$ при $i = 1, \ldots, m$, причем $\Re\,(c_m) > 0$, и кратко обозначено $d\bar{x} = dx_1 \cdots dx_m$.

Гипергеометрическая функция Гаусса $\mathrm{F}(a_0, a_1, b_1|z)$ является частным случаем интеграла (1):

$$\mathrm{F}(a_0, a_1, b_1|z) \;=\; \mathrm{I}_1(a_1; b_1; a_0|z) \qquad (2)$$

Согласно [1; пункт 2.1.4] в области $|arg(1-z)| < \pi$ справедливо

$$(1-z)^{-a_1} \cdot \mathrm{F}\left(a_0, a_1, b_1 \middle| \frac{-z}{1-z}\right) \;=\; \mathrm{F}\left(b_1 - a_0, a_1, b_1|z\right). \qquad (3)$$

Мы покажем, что верно более общее тождество.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия для параметров интеграла* (1), *а также* $\Re\,(b_i) > \Re\,(c_i + a_{i+1})$, $i = 1, \ldots, m-1$ *и* $\Re\,(b_m) > \Re\,(c_m)$. *Тогда*

$$(1-z)^{-a_1} \cdot \mathrm{I}_m\left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \middle| \frac{-z}{1-z}\right) = \mathrm{I}_m(\bar{a}; \bar{b}; b_1 - a_2 - c_1, \ldots, b_{m-1} - a_m - c_{m-1}, b_m - c_m|z).$$

Заметим, что теорема 1 была доказана совершенно другим методом в работе [2] при существенных ограничениях $b_i - a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$. Метод же, примененный теперь, почерпнут из работы С. Злобина [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Изд. «Наука», 1965. **[2]** Е. А. Уланский, “Об одном тождестве для обобщения гипергеометрического интеграла”, *Матем. заметки*, **79(5)** (2006), 796–799. **[3]** С. А. Злобин, “О некоторых интегральных тождествах”, *Успехи матем. наук*, **57(3)** (2002), 153–154.

Е. А. Уланский
МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: `ulanskiy@mail.ru`