Вопросы и задачи спецкурса
“Некоторые нерешенные задачи теории чисел”

I. Проблема Зарембы.

1 (a). Что такое проблема Зарембы?

2 (a). Теорема. Если p - простое, то существует целое a, такое, что неполные частные разложения в обыкновенную цепную дробь числа a/p не больше $10\log p$.

3 (a). Доказать, что если q - натуральное, то существует целое $a, (a,q) = 1$, такое, что неполные частные разложения в обыкновенную цепную дробь числа a/q не больше $10\frac{q\log q}{\varphi(q)}$.

4(a). Доказать, что если p - простое, то существует не менее десяти различных целых a, таких, что неполные частные разложения в обыкновенную цепную дробь чисел a/p не больше $100\log p$.

5 (a). Если известно разложение в цепную дробь $a/q = [0; a_1, .., a_t], (a,q) = 1$, то как выглядят разложения в цепную дробь чисел $1 - a/q, a^*/q, 1 - a^*/q$? Здесь a^* определяется из условия $aa^* \equiv 1 \pmod q, 1 \leqslant a^* \leqslant q$.

6 (b). Доказать гипотезу Зарембы для чисел вида $q = 2^n$ и 3^n.

7 (b). Доказать, что если q - натуральное, то существует целое $a, (a,q) = 1$, такое, что неполные частные разложения в обыкновенную цепную дробь числа a/q не больше $10\log q$.

8 (c). Решить проблему Зарембы для какой-нибудь бесконечной последовательности натуральных чисел n_k, такой что количество простых делителей числа n_k стремиться к бесконечности при $k \to \infty$.

II. Функция Минковского.

1 (a). Что такое функция Минковского $?(x)$?

2 (a). Доказать, что функция Минковского непрерывна.

3 (a). Доказать, что функция Минковского дифференцируема почти всюду.

4 (a). Доказать, что если в некоторой точке x существует производная $?'(x)$, то она равна нулю или бесконечеости.

5 (a). Доказать, что $?(x)$ принимает рациональные значения, если x - квадратичная иррациональность.

6 (a). Чему равно $?'(x)$ при рациональных x?

7 (a). Чему равно $?'\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$?

8 (b). Пусть все неполные частные разложения x в цепную дробь ограничены 4. Доказать, что $?'(x) = +\infty$.

9 (b). Пусть $f(x)$ - функция, обратная функции $?(x)$. Доказать равенство

$$\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx = \int_0^1 (?(x) - x)^2 dx.$$

10 (b). Доказать, что уравнение $?(x) = x$ имеет иррациональный корень.

11 (c). Сколько корней имеет уравнение $?(x) = x$?

III. Канторовы множества.

1 (a). Что такое канторово τ-множество?

2 (a). Рассмотрим обычное канторово множество K, состоящее из чисел отрезка $[0,1]$, которые в троичной системе счисления могут быть записаны без использования цифры 1. Что представляет из себя множество $K + K$?

3 (a). Пусть F_k - множество тех чисел из отрезка $[0,1]$, у которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят k. Найти минимальные и максимальные эементы множеств F_k.

4 (a). Доказать, что множество F_4 чисел из отрезка $[0,1]$, у которых неполные частные разложения в цепную дробь не превосходят 4, является τ-множеством с $\tau = 1$.

5 (a). Доказать, что множество $F_4 + F_4$ есть отрезок.

6 (a). Доказать, что множество $F_4 \cdot F_4$ есть отрезок.

7 (a). Найти минимальное t, такое, что $\underbrace{F_2 + ... + F_2}_{t \text{ раз}}$ есть отрезок.

8 (a). Решить задачу 6 для множества F_3.

9 (b). Найти максимальное τ, такое, что F_4 (или хотя бы F_2 или F_3) является τ-множеством.

Следующие три вопроса касаются приложения к диофантовым приближениям. Здесь через q_n обозначается знаменатель n-той подходящей дроби к числу α. $||\cdot||$ - расстояние до ближайшего целого числа.

10 (b). Спектр Лагранжа. Рассмотрим множество

$$\mathbb{L} = \{\lambda : \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \ \lambda = \liminf_{n\to\infty} q_n ||q_n \alpha||\}.$$

Доказать, что найдется положительное λ^*, такое, что $[0, \lambda^*] \subset \mathbb{L}$. (Теорема Холла.)

11 (b). Спектр Дирихле. Рассмотрим множество

$$\mathbb{D} = \{\lambda : \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \ \lambda = \limsup_{n\to\infty} q_{n+1} ||q_n \alpha||\}.$$

Доказать, что найдется положительное $d^* < 1$, такое что $[d^*, 1] \subset \mathbb{D}$.

12 (b). Понять определение функции $\mu_\alpha(t)$ и множества $\mathbb{M}$ из работы
http://arxiv.org/abs/1202.4622 (работа находится в интернете а базе arXiv).

13 (c). Верно ли, что $\mathbb{M} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$?

III. Числа спропущенными цифрами и аддитивная комбинаторика.

Всюду ниже $s > k \geqslant 2$ – натуральные числа, $D = \{d_1, ..., d_k\} \subset \mathbf{N}$, $0 \leqslant d_1 < ... < d_k < s$ – некоторое фиксированное множество цифр в системе счисления по основанию s и d_0 – минимальный положительный элемент множества D.

$$K_s^D = \{x \in \mathbf{N} : \ \ x = \sum_{j=0}^{h} \delta_j s^j, \ \ \delta_j \in D\}, \ \ K_s^D(Q) = \{x \in K_s^D : x < Q\}.$$

1 (a). Доказать, что случае, когда $(d_1, ..., d_k) = 1$ найдется целое неотрицательное число g, обладающее следующим свойством: для любого натурального $x > g$ найдутся неотрицательные целые $x_1, ..., x_k$ такие, что $x = x_1 d_1 + ... + x_k d_k$.

2 (a). Доказать, что $K_3^{\{0,1\}} + K_3^{\{0,1\}} = \mathbb{N}$.

3 (a). Пусть $k \geqslant 2$ и $(d_1, ..., d_k) = 1$. Доказать, что при некоторых $G = G(d_1, .., d_k), T = T(d_1, .., d_k)$ всякое натуральное число $x > G$ представимо в виде суммы не более чем T слагаемых из K_s^D.

5 (a). Пусть $p \geqslant 3$ - простое число вида $4k - 1$, Доказать, что в множестве $K_3^{\{0,1\}} \cap [1, p-2]$ найдется квадратичный невычет $\pmod p$.

6 (a). Пусть $p \geqslant 3$ - простое число вида $4k - 1$, Доказать, что в множестве $K_3^{\{0,2\}} \cap [1, p-2]$ найдется квадратичный невычет $\pmod p$.

7 (b-c). Решить задачи 5 и 6 для простых вида $4k + 1$.

8 (a). Пусть p - простое число, $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ - два непустых подмножества. Доказать, что $|A + B| \geqslant \min(p, |A| + |B| - 1)$.

9 (a). Пусть p - простое число, $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{Z}_p$ - непустые подмножества. Доказать, что $|A_1 + ... + A_k| \geqslant \min(p, \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} |A_i| + k - 1)$.

10 (a). Пусть $A, B, C \subset \mathbb{Z}_p$ - произвольные множества. Доказать $|C|\cdot|A-B| \leqslant |A-C|\cdot|B-C|$.

11 (a-b). Пусть $A, B, C \subset \mathbb{Z}_p$ - произвольные множества. Доказать $|C| \cdot |A+B| \leqslant |A+C| \cdot |B+C|$.

12 (a). Пусть множество A - базис натурального ряда порядка 2, а множество $B \subset \mathbb{N}$ - произвольное. Доказать $|A+B| \geqslant |A|^{1/2}|B|^{1/2}$.

13 (b). Пусть множество A - базис натурального ряда порядка k, а множество $B \subset \mathbb{N}$ - произвольное. Доказать $|A+B| \geqslant |A|^{1/k}|B|^{1-1/k}$.

14 (a-b). Пусть $k \geqslant 2$ и $(d_1, ..., d_k) = 1$. Доказать, что с некоторой постоянной $\gamma = \gamma(D)$ для любого $q \in \mathbb{N}$ при любом $N \geqslant \exp(\gamma \log q \log\log q)$ в множестве $[1, N] \cap K_s^D$ встречается любой вычет $\pmod q$.