

1. (Н.Х.Розов) Определите максимальный интервал продолжимости направо решения задачи Коши

$$\dot{x} = x^2 - 4t^2, \quad x(1) = 1.$$

2. (А.С.Шамаев) Может ли функция

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

быть решением дифференциального уравнения (при $t \geq 0$)

$$x^{(2003)} + a(t)x = 0,$$

где $a(t)$ - бесконечно гладкая функция на $(-\infty, +\infty)$?

3. (Н.Х.Розов) Докажите, что любое решение уравнения

$$\ddot{x} + e^t x = 0$$

ограничено на \mathbb{R}_+ .

4. (А.С.Шамаев) Докажите, что для решения задачи Коши

$$\ddot{x} - e^t x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = a$$

существует единственное значение a , при котором решение $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

5. (И.Н.Сергеев) Пусть определитель Вронского двух вещественно аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ на интервале (a, b) равен нулю. Докажите, что f и g линейно зависимы.

6. (А.С.Шамаев) Пусть положения равновесия систем $\dot{x} = Ax$ и $\dot{y} = By$, A, B — постоянные матрицы, устойчиво по Ляпунову. Можно ли утверждать то же самое относительно системы $\dot{z} = (A + B)z$?

7. (И.В.Матросов) При каких условиях на $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C^\infty$ все решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = ax^{1/3} + f(x)$$

единственны?

8. (И.В.Матросов) Пусть

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \quad f(t, 0) \equiv 0$$

и известно, что $\exists L > 0$ такое, что $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$

$$(x - y, f(t, x) - f(t, y)) \leq L \|x - y\|^2 \ln \|x - y\|.$$

Будет ли решение $x(t)$ продолжимо на $[0, +\infty)$ или на $(-\infty, 0]$?

9. (Н.Х.Розов) Может ли траектория системы

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y, \quad x(1) = y(1) = 1$$

попасть за конечное время в точку $(a - 1, a)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$?

10. (А.С.Городецкий) Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является предельным циклом векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1). \end{cases}$$

Выясните, является ли этот предельный цикл устойчивым, неустойчивым или полустойчивым.

11. (Ю.С.Ильяшенко) Нарисовать фазовый портрет системы

а. $\dot{z} = i \operatorname{grad} H(z)$, $H(x + iy) = y^2 - x^2 + x^4$,

б. $\dot{z} = ie^{iH(z)} \operatorname{grad} H(z)$.

12. (Ю.С.Ильяшенко) Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - y \\ \dot{y} = x^3 - x^2. \end{cases}$$

Указать все начальные условия, для которых соответствующие решения ограничены.