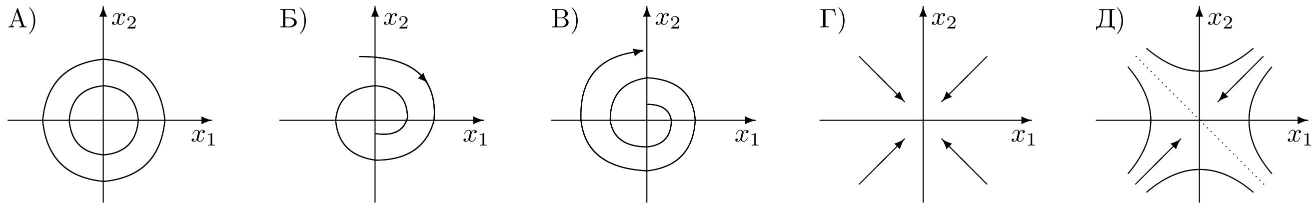
ОЛИМПИАДА

1. (2 балла) Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = F'_{x_2}(x_1, x_2), \qquad \dot{x}_2 = -F'_{x_1}(x_1, x_2),$$

где $F(x_1, x_2)$ — гладкая функция. Пусть $\nabla_x F(0,0) = 0$. Какое поведение траекторий возможно в окрестности точки $(0,0)$? Ответ обоснуйте.



2. (2 балла) Пусть абсолютно непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению

$$\dot{u}(t) + u(t-1) = 0 \quad \text{на} \quad [0,3] \qquad \text{и} \quad u(t) \equiv 1 \quad \text{на} \quad [-1,0].$$

Найдите $u(3)$.

3. (3 балла) В долине реки МГАГБЕ приживают два племени — МГАНГО и МУМБО–ЮМБО. Оба они занимаются собирательством и разведением скота, а также совершают набеги друг на друга. Примем, что совокупный ресурс племен составляет соответственно x_1 и x_2 (это имущество, запасы продуктов, скот и пр.) и скорость его прироста пропорциональна его величине с коэффициентами a_1 и a_2 для каждого племени соответственно. Однако с увеличением ресурсов численность племен пропорционально возрастает, жителям становится тесно в долине реки МГАГБЕ, и они начинают конкурировать со своими соплеменниками, мешая друг другу. За счет этого ресурс каждого племени уменьшается на величину $c_1 x_1^2$ и $c_2 x_2^2$ соответственно. Кроме того, племена враждуют друг с другом и, совершая набеги, наносят друг другу взаимный ущерб, равный $b_1 x_1 x_2$ для МГАНГО и $b_2 x_1 x_2$ для МУМБО–ЮМБО, где b_1 и b_2 — коэффициенты "агрессивности". Составьте уравнение динамики ресурсов племен и на основании этих уравнений предскажите, какой из сценариев развития событий в долине реки МГАГБЕ возможен:

   а) одно из племен полностью побеждает другое;

   б) обо племени сосуществуют с ненулевыми совокупными ресурсами;

   в) возможно и то и другое в зависимости от параметров a_i, b_i, c_i.

4. (4 балла) Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + (\dot{x})^n + x^m = 0,$$

n, m — натуральные числа. (Эта система описывает движение нелинейной колебательной системы с трением, также нелинейно зависящим от скорости.) При каких n и m положение равновесия $(0,0)$ устойчиво по Ляпунову?

5. (4 балла) Рассмотрим уравнение с начальными условиями

$$\ddot{x}_\varepsilon + a\big(\tfrac{t}{\varepsilon}\big)x_\varepsilon = 0, \qquad x_\varepsilon(0) = 0, \quad \dot{x}_\varepsilon(0) = 1, \qquad a(t) = \begin{cases} \alpha & \text{при} \quad t \in \big[0, \, \tfrac{1}{2}\big], \\ \beta & \text{при} \quad t \in \big[\tfrac{1}{2}, \, 1\big], \end{cases}$$

α, β — положительные постоянные, ε — малый параметр. Это уравнение с разрывными коэффициентами, и его решение — это функция, удовлетворяющая уравнению внутри каждого отрезка $\big[\varepsilon k, \, \varepsilon(k + \tfrac{1}{2})\big]$, $\big[\varepsilon(k+\tfrac{1}{2}), \, \varepsilon(k+1)\big]$, непрерывная и имеющая равные нулю скачки первых производных в точках разрыва $a\big(\tfrac{t}{\varepsilon}\big)$. Существует ли предел $x_\varepsilon(1)$ при $\varepsilon \to 0$?

6. (2 балла) Доказать, что замкнутые фазовые кривые квадратичного векторного поля на плоскости выпуклы.

7. (3 балла) Дано уравнение n–ого порядка с постоянными коэффициентами. Всегда ли существует решение этого уравнения, по которому можно восстановить все коэффициенты уравнения?

8. (4 балла) Известно уравнение движения маятника

$$x'' + bx' + x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = v.$$

Из–за сопротивления среды b колебания затухают. Чтобы колебания не затухали, в каждый такой момент t_i, что $x(t_i) = 0$, $x'(t_i) > 0$, маятнику сообщается дополнительный импульс, не меняющий $x(t_i)$, но увеличивающий (мгновенно) скорость $x'(t_i)$ в k раз. Каким должно быть k, чтобы движение маятника было периодическим?

9. (5 баллов) Функция $x(t) \in C^2[0,\pi]$ и удовлетворяет условиям

$$\ddot{x} + x \geqslant 0, \qquad x(0) \geqslant 0, \quad x(\pi) \geqslant 0.$$

Доказать, что $x(t) = C \sin t$.