ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2005

1. (2) Пусть $x_0 = 0$ — изолированное положение равновесия системы
$$\dot{x} = \nabla f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^2,$$
причем 0 не является точкой максимума для $f(x)$. Может ли это положение равновесия быть устойчивым?

2. (2) Решение уравнения
$$\ddot{x} - (\sin t)\, x = 0$$
удовлетворяет условиям $x(1) = x(2) = 0$. Докажите, что $x(t) \equiv 0$.

3. (1+1) Известно, что все решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами
$$\mathfrak{L}x \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$$
ограничены на всей прямой. Сохраняется ли это свойство для уравнения $\mathfrak{L}x = \varphi(t)$, если
   а) $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(t)$ — финитна, т.е. $\varphi(t) \equiv 0$ вне отрезка $[-T, T]$;
   б) $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\Big|\varphi(t)\Big| \to 0$ при $|t| \to \infty$?

4. (3) Пусть $f, g \in C^3(\mathbb{R})$. Известно, что $W(f,g) \neq 0$ на $[a,b]$, W — определитель Вронского функций f, g. Докажите, что существует функция $h \in C^3(\mathbb{R})$, такая, что $W(f,g,h) \neq 0$ на $[a,b]$.

5. (2) Имеет ли решение задачи Коши
$$\dot{x} = (t^2 + x)^{-1}, \qquad x(1) = 1$$
конечный предел при $t \to \infty$?

6. (1+4) Устойчиво ли нулевое положение равновесия уравнения
   а) $x^{(2004)} + x = 0\,$; б) $x^{(2004)} + (x)^{2005} = 0\,$?

7. (2) Выяснить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ система
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\,(y^4 + x^3) - y^2(x + 3y^2), \\ \dot{y} &= a\,(x^4 + y^3) - x^2(y + 3x^2) \end{aligned}$$
имеет периодические решения, отличные от точки равновесия.

8. (3) Найти решение системы
$$\dot{x} = Ax + e^t \sin t\, a_6$$
с начальным условием $x(0) = a_6$, $x \in \mathbb{R}^6$,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. (4) Докажите, что существует значение параметра λ, при котором уравнение
$$\ddot{x} + t\dot{x} - t^2 x = \lambda x$$
имеет решение $x(t)$, стремящееся к нулю при $|t| \to \infty$.

10. (3) Рассмотрим уравнение маятника
$$\ddot{x} + \omega^2 x = u(t),$$
$u(t)$ — управляющая сила, $\Big|u(t)\Big| \leqslant 1$. На какое максимальное расстояние можно увести маятник из начального состояния покоя $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ за время T?

11. (3) Множество M точек $(x,y,p) \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,p) = 0$, диффеоморфно сфере, причем граница $\mathit{\Gamma}$ проекции M на плоскость (x,y) является гладкой кривой. Может ли эта кривая быть решением неявного дифференциального уравнения
$$F\Big(x, y, \frac{dy}{dx}\Big) = 0\,?$$
Тот же вопрос для случая, когда $\mathit{\Gamma}$ не является гладкой в изолированных точках.