Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2006 г.

1. (1 балл) Одно из решений уравнения $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ устойчиво по Ляпунову. Докажите, что любое решение устойчиво по Ляпунову.

2. (2 балла) Найдите производную порядка n по параметру a в точке $a = 0$ выражения
$$\det\left(\int_0^a \exp(At)\,dt\right),$$
где A — произвольная обратимая матрица размерности n.

3. (2 балла) Докажите, что у линейной системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ не может быть предельных циклов (изолированных периодических решений).

4. (5 баллов) Известно, что $x \equiv 0$ — решение уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, и что решение $y \equiv 0$ его линеаризации $\dot{y} = f'_x(0,t)y$ асимптотически устойчиво. Покажите на примере, что нулевое решение исходного уравнения может не быть асимптотически устойчивым.

5. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, с непрерывной правой частью не удовлетворяет в некоторых точках условиям теоремы о единственности решения. Может ли оно иметь:

   а) (2 балла) множество решений $x_a(t)$, $a \in \mathbb{R}$, для которых $x_a(0) = 0$ и $x_a(1) = a$?

   б) (3 балла) два решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, такие, что $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, а $x_2(0) = 1$, $x_2(1) = 0$?

   в) (2 балла) такие же вопросы для для уравнения вида $\dot{x} = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}$.

6. (3 балла) Докажите, что для всякого ненулевого решения $x(t)$ уравнения $\ddot{x} + \omega^2(t^2 + 1)x = 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся два различных момента времени t_1, t_2, такие, что $x(t_1) = x(t_2) = 0$ и $|t_1 - t_2| < \varepsilon$.

7. (5 баллов) Докажите, что нулевое решение уравнения $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$ асимптотически устойчиво, если известно, что $\varphi(0) = f(0) = 0$, и при $x \neq 0$ $x\varphi(x) > 0$, $xf(x) > 0$.

8. (5 баллов) Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$ с матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \sin t \\ 1 & 0 & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

9. а) (2 балла) Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два линейно независимых решения линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Может ли определитель Вронского $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обращаться в ноль на некотором интервале?

   б) (3 балла) Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ — три линейно независимых решения линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Может ли определитель Вронского $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ обращаться в ноль на некотором интервале?

10. (3 балла) Нарисовать фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 - x \\ \dot{y} &= 2xy - y \end{cases}$$

11. (4 балла) Оцените отличие от 2π периода решения уравнения физического маятника $\ddot{x} = -\sin x$ с малой амплитудой $x(0) = \mu$ ($\dot{x}(0) = 0$).

12. (5 баллов) Правая часть дифференциального уравнения математического маятника с трением (и внешней силой)

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t)$$

является гладкой функцией, удовлетворяющей условию $|f(t)| \leqslant (C + |t|)^{-k}$, $k > 0$, α — неотрицательное, β — положительное число. При каких значениях α, β, k можно так выбрать $f(t)$, чтобы раскачать маятник, то есть чтобы для некоторого решения $\sup\limits_{t\in[0,T]} |x(t)| \to \infty$ при $T \to \infty$?