Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2007 г.

1. (3) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение матрицы $\exp\begin{pmatrix} B & C \\ A & -B^T \end{pmatrix}$, $A,\ B,\ C$ — матрицы размерности $n \times n$, $A,\ C$ — симметрические. Докажите, что $\overline{\lambda},\ \lambda^{-1},\ (\overline{\lambda})^{-1}$ — также ее собственные значения.

2. (1) Найдите какое–нибудь отличное от тождественного нуля аналитическое решение уравнения с "отклоняющимся"аргументом:
$$\frac{d}{dt}\,y(t) + y(t-\alpha) = 0, \qquad \alpha = const > 0.$$

3. (1) Найдите замену переменных, приводящую уравнение
$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$
$\big(f, g \in C(\mathbb{R})\big)$ к системе вида
$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x). \end{cases}$$

4. (3) Какие значения может принимать величина $\dim X$, где X — пространство ограниченных на всей вещественной прямой решений уравнения
$$\ddot{y} + a(t)\,y = 0$$
$a(t)$ — гладкая периодическая функция, удовлетворяющая оценке $0 < m \leqslant a(t) \leqslant M < \infty$?

5. (2) Пусть $y(t)$ — решение уравнения
$$\ddot{y} + \omega^2\,y = f(t),$$
где $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^1} \big|f(t)\big| = \infty$. Может ли $y(t)$ быть ограниченным на $\mathbb{R}^1$?

6. Рассмотрим уравнение $y^{(n)} + a \cdot y = 0$, $a = const$. Существует ли такое целое n, что

   а) (2) уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1,\ y_2$, такие, что каждое из решений имеет счетное число корней и множества корней для $y_1,\ y_2$ совпадают;

   б) (2) уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1,\ y_2$, такие, что каждое из них имеет счетное количество корней, и при этом множества корней для y_1 и y_2 пересекаются по счетному множеству, но разность этих двух множеств также счетна.

7. (3) Привести пример такой непрерывной на $(0, +\infty)$ монотонной функции $a(t)$, чтобы все решения $\ddot{y} + a(t)\,y = 0$ стремились при $t \to +\infty$ к нулю.

8. а) (2) Доказать, что при любом значении параметра $\varepsilon > 0$ краевая задача
$$\begin{cases} \varepsilon\,\dfrac{dx}{dt} &= -x + 8y - 15, \qquad x\big|_{t=0} = -1, \\ \varepsilon\,\dfrac{dy}{dt} &= x + y - 3, \qquad\quad y\big|_{t=1} = 3, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) (4) Пусть $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ — решение указанной краевой задачи. При каждом фиксированном значении $t \in [0,1]$ найти пределы: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon)$.

9. (4) Решение с начальным условием $t=0$, $x=y=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= u(x,y) \\ \dot{y} &= v(x,y) \end{cases}$$

в момент времени $t=2\pi$ проходит через точку $x=1$, $y=1$, а в момент $t=t_1$ через точку $x=1$, $y=-1$. Какие значения может принимать t_1, если известно, что фазовый поток системы состоит из преобразований плоскости, сохраняющих элемент площади, и система является овеществлением комплексного уравнения $\dot{z}=f(z)$, где $f(z)$ — дифференцируемая функция, заданная на всей плоскости $z=x+iy$?

10. (2) Функция $\varphi(t,x,y)$ задает концентрацию яда, попавшего в реку, в точке с координатами x,y в момент времени t. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (y-x-t)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (t-x-y)\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,.$$

В начальный момент $t=0$ функция $\varphi(0,x,y)$ представляла собой выпуклую (вверх) положительную функцию, заданную в области $x^2+y^2<1$, $\varphi(0,x,y)\equiv 0$ при $x^2+y^2\geqslant 1$. Оцените число точек локального максимума функции $\varphi(1,x,y)$, площадь и положение зараженного пятна при $t=1$.