Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям
Кафедра дифференциальных уравнений, 2008 г.

1. [10] Найдите e^A, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Пусть особая точка линейного векторного поля на плоскости — устойчивый фокус.

a) [5] За конечное ли время проходит точка траекторию от своего начального значения до начала координат?

b) [10] Конечна ли длина этой траектории?

3. [15] Возможно ли *раскачать* математический маятник внешней силой порядка ε за время порядка ε^{-1}, т. е. можно ли в задаче

$$\ddot{x} + x = f_\varepsilon(t), \quad |f_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

при некотором фиксированном $C > 0$ для каждого $\varepsilon > 0$ подобрать непрерывную функцию f_ε так, чтобы решение x полученной задачи удовлетворяло неравенству

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant C/\varepsilon} |x(t)| \geqslant 1?$$

4. [10] Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ функции $e^{t^1}, e^{t^2}, \ldots, e^{t^n}$ линейно независимы на отрезке $[0; 1]$.

5. [20] Доказать, что если определитель Вронского скалярных функций $f, g, h \in \mathrm{C}^2(I)$ на интервале I тождественно равен нулю, то на некотором интервале $J \subset I$ они линейно зависимы.

6. Пусть на плоскости задано гладкое векторное поле v. Можно ли утверждать, что все непродолжаемые решения уравнения

$$\dot{x} = v(x)$$

определены на всей числовой оси, если:

a) [10] $|v(x)| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2$;

b) [5] $|v(x)| \leqslant |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2$?

7. **a)** [5] Нарисовать фазовые кривые уравнения

$$\ddot{x} + x^3 = 0.$$

b) [10] Найти *период малых колебаний* вблизи его нулевой неподвижной точки (т. е. предел периода колебаний, амплитуда которых стремится к нулю).

8. [20] Может ли случиться так, что нулевое решение уравнения

$$\ddot{x} = f(x), \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \quad (f(0) = 0),$$

устойчиво по Ляпунову, а все остальные — неустойчивы?

9. **a)** [10] Устойчиво ли по Ляпунову нулевое решение уравнения

$$\ddot{x} + (\dot{x})^{2007} + \omega^2 x = 0 \quad (\omega > 0)?$$

b) [15] Обязательно ли существует предел произвольного ненулевого решения $x(t)$ этого уравнения при $t \to \infty$, и чему он может быть равен?

10. Назовем *частотой* функции $x\colon [0; \infty) \to \mathbb{R}$ величину

$$\omega(x) = \varlimsup_{T \to +\infty} \frac{\pi}{T} \nu(x, T),$$

где $\nu(x, T)$ — количество нулей (с учетом кратности) функции x на промежутке $(0, T]$.

a) [15] Оценить сверху частоту произвольного ненулевого решения уравнения

$$x^{(2008)} + x = 0.$$

b) [25] Найти частоту функции

$$x(t) = \sin t + \sin \pi t.$$

11. [20] Пусть $\mu \in \mathrm{C}^1(G)$ — *интегрирующий множитель* для уравнения

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \quad M, N \in \mathrm{C}^1(G),$$

а $\Phi(x, y) = C$ — общее решение соответствующего уравнения в полных дифференциалах

$$\mu(x, y) M(x, y)\, dx + \mu(x, y) N(x, y)\, dy = 0.$$

Какой формулой задаются все остальные интегрирующие множители исходного уравнения?