ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2009

1. (4) Решить задачу $\dot{x} = \dfrac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\, x, \quad t > 0, \qquad \lim\limits_{t\to+0} x(t) = e.$

2. (3) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ — произвольная неограниченная последовательность чисел. Может ли она быть последовательностью нулей некоторого решения какого-либо уравнения $\ddot{x} + a(t)\,x = 0$, где $a(t)$ — гладкая функция?

3. (4)Существует ли линейное однородное уравнение 2009-го порядка, некоторая фундаментальная матрица которого удовлетворяет равенству $Y(t,0) = E$:

   (a) при всех $t \in \mathbb{Q}$;

   (b) при всех $t \in \mathbb{Z}$?

4. (3) Можно ли найти общее решение уравнения Риккати $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$, если известны три его различных частных решения y_1, y_2, y_3?

5. (4) (*Вычисление экспоненты методом А. Ф. Филиппова*) Найдите скалярные функции p и q от двух переменных каждая, удовлетворяющие для любой квадратной матрицы A второго порядка с собственными значениями λ_1, λ_2 равенству

$$e^A = p(\lambda_1, \lambda_2) \cdot E + q(\lambda_1, \lambda_2) \cdot A.$$

6. (4) Докажите, что если уравнение $\ddot{y} + a(t)y = 0$, $t \geqslant 0$, с непрерывным коэффициентом $a(t)$ имеет решение, стремящееся к постоянной на бесконечности, то любое его нетривиальное решение эквивалентно $kx + b$ при $t \to +\infty$, $k^2 + b^2 \neq 0$.

7. (3) Есть предположение, что *переживаемое* человеком время t вблизи настоящего момента воспринимается им не как абсолютное, а как его отношение ко всему времени $x(t)$, *прожитому* этим человеком к настоящему моменту. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

8. (4) Рассматривается система дифференциальных уравнений, записанная в полярной системе координат:

$$r' = rf(r^2), \quad \varphi' = 1,$$

   где f — гладкая функция. Предполагается, что эта система имеет предельный цикл. Будет ли решение, отвечающее этому предельному циклу:
   — устойчиво по Ляпунову?
   — асимптотически устойчиво?

9. (3) Доказать, что каждое решение уравнения $y'' + e^x y = 0$ ограничено при $x \to \infty$.

10. (4) Привести пример уравнения $y' = f(x,y)$, с непрерывной $f(x,y)$ на всей плоскости, такой, чтобы какова бы ни была $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, существовало бы только одно решение в окрестности x_0, такое, что $y(x_0) = y_0$, и чтобы существовало бы по крайней мере два решения такие, что $y(0) = 0$.

11. (4) Пусть нулевое решение системы $\dot{x} = A\,x$, где A — постоянная матрица, устойчиво по Ляпунову. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения системы $\dot{x} = \left(A + \dfrac{1}{1+t^2}\,E\right) x$?