ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2010

1. Для уравнения
$$\left(x^2+2x+1\right)y''+(x+1)y'+y=0$$
найти первый положительный корень решения, удовлетворяющего условию $y(0)=0$.

2. Устойчивы ли нулевые решения уравнений
$$2a)\quad y''+iy'+y=0,$$
$$2b)\quad y''+iy'-y=0?$$

3. Доказать, что все решения уравнения
$$y''+y^3=0$$
— периодические.

4. Доказать, что не существует точки накопления нулей функции $y^{(k)}(x)$, $0\le k\le n-1$, где $y(x)$ — решение уравнения
$$y^{(n)}+a(x)y=0,$$
$n\ge 1$, $a(x)$ — непрерывна и имеет не более чем конечное число нулей.

5. Существует ли решение уравнения $y^{IV}+a(x)y=0$ ($a(x)$ — положительная непрерывная функция), имеющее 2 двукратных нуля, то есть удовлетворяющее для некоторых $x_1\ne x_2$ условиям $y(x_1)=y'(x_1)=y(x_2)=y'(x_2)=0$?

6. Исследовать на устойчивость все решения системы
$$\begin{cases}\dot x= & -y\sqrt{x^2+y^2}\\ \dot y= & x\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

7. Докажите, что если какое-либо решение уравнения
$$\ddot y+r(t)y=0,\quad t\ge 0$$
с непрерывным ограниченным коэффициентом $r(t)$ ограничено на полупрямой, то его производная тоже ограничена.

8. Какое наибольшее количество различных значений может принимать величина
   (a) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln|x(t)|$,
   (b) $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln|x(t)|$

   на ненулевых решениях системы вида
$$\dot x=\begin{pmatrix}a(t) & 0\\ 0 & b(t)\end{pmatrix}x,\quad x\in\mathbb{R}^2?$$

9. С каждым решением $x(t)$ уравнения $\ddot x=f(x,\dot x)$, не обращающимся в нуль вместе со своей производной, свяжем подвижный луч на фазовой плоскости, начинающийся в точке $(0,0)$ и проходящий через точку $(x(t),\dot x(t))$. Существует ли такая функция $f\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, что все такие лучи, находящиеся в:
   (a) верхней,
   (b) правой

   полуплоскости, с ростом t все время поворачиваются против часовой стрелки?

10. Отклонение математического маятника под действием силы f от положения равновесия описывается уравнением $\ddot x+\omega^2x=f(t)$. До какого максимального положения в точке $t=1$ можно отклонить математический маятник из положения равновесия $t=0$ за время от 0 до 1 силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0,1]$ ($\int_0^1 f(t)dt=0$), если $x(0)=\dot x(0)=0$?