ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2011

1. У дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$, $a > 0$, все решения, кроме $x \equiv 0$, неограничены при $t > 0$. Можно ли добиться существования ограниченного нетривиального решения, добавив к правой части bx^m, где $b > 0$, $m \in \mathbf{N}$, и рассматривая уравнение $\dot{x} = ax + bx^m$ при $t > 0$?

2. Рассматривается уравнение Ньютона $\ddot{x} = -x^3 + x^n$, $n \in \mathbf{N}$. При каких n положение равновесия $x_0 = 0$ устойчиво по Ляпунову?

3. Оценить снизу количество нулей решения уравнения $\ddot{x} + tx = 0$ на отрезке $[-100, 100]$.

4. Рассматривается математический маятник, управляемый малой силой $u(t)$, $|u(t)| < \varepsilon : \ddot{x} + \omega^2 x = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$. Можно ли привести маятник в положение покоя за конечное время, то есть верно ли, что для любых x_0, x_1, $\varepsilon > 0$, существует такая $u(t)$, $|u| \leq \varepsilon$, что соответствующее решение $x(t)$ удовлетворяет условиям $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ при некотором $T > 0$? Если можно, оценить это время через $\varepsilon, \omega, x_0, x_1$.

5. Легко видеть, что все решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ограничены. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая гладкая функция $a(t), |a(t)| < \varepsilon$, что уравнение $\ddot{x} + (\omega^2 + a(t))x = 0$ имеет неограниченные при $t > 0$ решения.

6. Известно, что $x(t, t_0)$ — решение задачи Коши
$$\dot{x} = x - e^{-2t}x^3 + e^t, \quad x|_{t=t_0} = 1,$$
— в случае $t_0 = 0$ имеет вид $x(t, 0) = e^t$. Найдите производную $u(t)$ решения $x(t, t_0)$ по начальному моменту t_0 при $t_0 = 0$ (зная, что она существует).

7. Пусть система $\dot{x} = f(x)$ ($f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R^2})$) на плоскости имеет изолированную особую точку $(0, 0)$, причем тем же свойством обладает и ее линеаризация $\dot{u} = Au$ в этой точке. Является ли какое-либо из следующих двух утверждений следствием другого:
а) все фазовые кривые исходной системы — циклы, окружающие особую точку;
б) все фазовые кривые линеаризованной системы — циклы, окружающие особую точку?

8. Можно ли систему $\dot{x_1} = a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2$, $\dot{x_2} = a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}(t)\, x_2$, заменой переменных $y_1 = h_{11}(t)\, x_1 + h_{12}(t)\, x_2$, $y_2 = h_{21}(t)\, x_1 + h_{22}(t)\, x_2$, привести к виду $\dot{y_1} = 0$, $\dot{y_2} = 0$?

9. Опишите все возможные типы поведения при $t \to +0$ решений уравнения $t^2\, \ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.

10. Найти решение уравнения $\dot{x}(t) = x(\pi)x(t)$.

11. Является ли неограниченным непродолжаемое (максимально продолженное) вправо решение задачи Коши: $\dot{x} = x^2 + 2yz$, $\dot{y} = y^2 + 2xz$, $\dot{z} = z^2 + 2xy$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$?

12. Известно, что некоторая фундаментальная матрица системы
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R^n}, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R},$$
при всяком $t \in \mathbf{R}$ ортогональна. Верно ли, что при всяком $t \in \mathbf{R}$ матрица $A(t)$ кососимметрична?

13. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x) < 0$. Пусть $y(x)$ – такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbf{R}$. Доказать, что $y(x)$ возрастает при всех $x > x_1$.