Обыкновенные дифференциальные уравнения
Олимпиада 2012

1. Докажите, что для одного (какого именно?) из двух уравнений $y' = \pm y^2 + x^2$ решение с начальным условием $y(0) = 0$ продолжается на всю полуось $x \geq 0$, а для другого — нет.

2. Известно, что *если все коэффициенты нормированного (т. е. с единичным старшим коэффициентом) линейного уравнения непрерывны на некотором интервале, то все его решения продолжаются на весь этот интервал.* Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

3. Найдите матрицу A системы $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, если некоторого ее решение $x(\cdot)$ удовлетворяет условиям
$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для изолированной особой точки неизвестной линейной автономной системы на плоскости нарисованы все ее n собственных (определяемых собственными векторами) прямых (при $n = 2$ — седло или узел, при $n = 1$ — вырожденный узел, а при $n = 0$ — центр или фокус соответственно), а также вектор фазовой скорости в некоторой не лежащей на них точке плоскости. При каких значениях n по этому рисунку можно однозначно определить, каков тип особой точки и является ли она устойчивой?

5. Докажите, что уравнение
$$y'' - (1 + e^{-x})y = 0$$
имеет два ненулевых решения y_1 и y_2, удовлетворяющие условиям $\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \to 1$ и $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \to -1$ при $x \to \infty$.

6. При $n = 1$ для любого векторного поля $f \in \mathrm{C}(G)$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ верно следующее:

   а) *если* $f(x_0) \neq 0$
   или

   б) *если* $f(x_0) = 0$ *и существует производная* $f'(x_0)$,
   то для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ *через точку* (t_0, x_0) *проходит локально единственная интегральная кривая.* Верны ли эти признаки локальной единственности при $n > 1$?

7. При любом ли $n \in \mathbb{N}$ верно, что: *если данные n скалярных n раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на общем интервале, не являются линейно зависимыми ни на каком меньшем интервале, то их определитель Вронского хотя бы в одной точке отличен от нуля?*

8. Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования в пространстве многочленов от переменной x степени меньше 2012. Найдите все собственные значения оператора $\exp\left(\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}\right)$ и их кратности.

9. Все собственные значения матрицы $A(t)$, непрерывно зависящей от t, действительны и не превосходят -1 при всех $t \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что нулевое решение линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)\,x$

   а) асимптотически устойчиво?

   б) устойчиво?

10. Можно ли так подобрать правую часть уравнения
$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R},$$
чтобы из любой начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ фазовая траектория приходила бы в точку (0,0):

    а) за бесконечное время;

    b) за конечное время?