ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2013

1. Могут ли все ненулевые решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0,$$

быть неустойчивыми по Ляпунову, если нулевое решение этой системы

   1) неустойчиво;
   2) устойчиво;
   3) асиптотически устойчиво

по Ляпунову?

2. Часы с маятником (совершающим малые колебания, без трения) спешили на 2 ч в сутки. Когда грузик на маятнике опустили на 1 см, часы стали спешить на 1 ч в сутки. На сколько см еще нужно опустить грузик, чтобы часы шли точно?

3. Найти кривую, у которой длина отрезка любой ее касательной, заключенного между координатными осями, равна фиксированному числу $a > 0$.

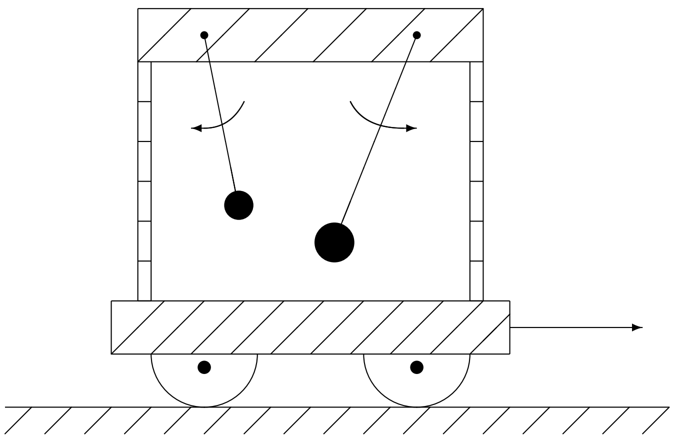
4. Существует ли у уравнения $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$ такое решение ϕ, для которого функция $t \mapsto \sin\phi(t)$ была бы непериодической?

5. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^∞. Векторнозначная функция $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является решением уравнения $y' = f(y)$ с начальными условиями $y(0) = 0$ и удовлетворяет условию $|y(x)| \to \infty$ при $x \to 1-0$. Следует ли отсюда, что при достаточно малых y_0 решение рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(0) = y_0$ не может быть определено для всех $x > 0$?

6.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = u(t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = u(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0. \end{cases}$$

Можно ли так двигать тележку с двумя маятникам (т.е. правильно подобрать общую функцию $u(t)$), чтобы остановить оба маятника, т.е. можно ли для заданных чисел $\omega_i > 0$, x_i^0, $\dot{x}_i^0$, $i = 1, 2$, указать функцию $u(t)$ такую, чтобы для некоторого $T > 0$ было выполнено $x_1(T) = x_2(T) = 0$, $\dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = 0$? Рассмотрите два случая: $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$.



7. Решите уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y - u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = y + 2u$.

8. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую гладкую функцию $|a(t)| < \varepsilon$, что уравнение

$$\ddot{x} + (1 + a(t))x = 0, \quad t > 0,$$

имеет неограниченное решение.

9. Решите уравнение $\dfrac{du}{dx} - u^2 = \dfrac{1}{x^4}$.

10. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x)$ — непрерывная функция, $p(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть y — такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) = y_0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{R}$. При каких значениях y_0 это решение обращается в ноль хотя бы в одной точке $x_2 > x_1$?