ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2015

Задача 1.

Для каждого значения $m = 0, 1, \ldots$ укажите наименьшее значение k, при котором любое линейное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = t^m \cos t$$

(с постоянными действительными коэффициентами) имеет частное решение вида

$$y = p_1(t)\cos(t + \varphi_1) + \ldots + p_k(t)\cos(t + \varphi_k),$$

где p_i — многочлены, а φ_i — числа.

Задача 2. Верно ли, что у любой системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

оператор A которой имеет собственные значения $\lambda_i[A]$ $(i = 1, \ldots, n)$, для всякого $T > 0$ найдется ненулевое решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее оценке:

$$1)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \min\limits_i |\lambda_i[A]|}, \qquad 2)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \max\limits_i \mathrm{Re}\lambda_\mathrm{i}[\mathrm{A}]},$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$?

Задача 3.

Верно ли, что решения семейства задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, \quad f \in \mathrm{C}^1(I \times J),$$

непрерывно зависят от начального значения $x_0 \in J$ равномерно по t на заданном ограниченном интервале I, если известно, что все они определены на нем и имеют конечные пределы на его концах?

Задача 4. Существует ли такая функция $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, что все решения уравнения $y'' = f(y, y')$ являются ограниченными и имеют ограниченную область определения?

Задача 5. Решить уравнение

$$y'^3 + x\,y'^2 - (2x + 3)y' + y = 0.$$

Будет ли единственным решение с начальным условием

а) $y(-1) = 1$; б) $y(-2) = 0$.

Задача 6.

Исследовать характер особых точек и построить фазовый портрет системы

$$\dot{x} = x^2 - y,$$

$$\dot{y} = (x - y)(x - y + 2)$$

на квадрате $[-5,\ 5] \times [-5,\ 5]$.

Задача 7. Может ли уравнение

$$y'' + f(y') + y = 0,$$

с гладкой функцией $f(y)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $yf(y) > 0$ при $y \neq 0$, иметь периодические решения, отличные от $y = 0$?

Задача 8. Пусть $y(x)$—решение уравнения

$$y''' + p(x)y = 0$$

с непрерывной положительной на $[x_0, \infty)$ функцией $p(x)$, удовлетворяющее условиям $y(x_1) = y'(x_1) = 0, y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 > x_0$. Доказать, что $y(x)$ убывает на $(x_0,\, x_1)$.

Задача 9. Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши

$$y^{(n)} = y^{2015} + x^{2014},$$

$$y(0) = y_0 > 0,\ y'(0) = y_1 > 0,\ \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} > 0$$

при а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) любом n?

Задача 10. Найти число решений следующей задачи:

$$a(a^2 - 3a - 4)\,y''' + a(a + 1)\,y'' - (a - 4)\,y' + 4y = x^2 + a,$$

$$y(0) = -1,\ y'(0) = 1,$$

в зависимости от параметра a. Ответ пояснить.