ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2016

Задача 1. Укажите необходимое и достаточное условие на скалярную функцию $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, при котором она служит ненулевым решением какого-либо уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0,$$

коэффициенты p, q которого:

а) непрерывны на прямой $\mathbb{R}$; б) непрерывны и ограничены на прямой $\mathbb{R}$.

Задача 2. Верно ли, что любое непродолжаемое решение уравнения

$$\dot{y} = f(x, y), \quad f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2),$$

определенное на интервале $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где $\beta \neq \infty$, стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ при $x \to \beta - 0$?

Задача 3. При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ для любого линейного неоднородного уравнения 2016-го порядка с постоянными коэффициентами и неоднородностью $f(t) = t^{100}e^{2t}\sin 5t$ существует такое линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами, что все решения первого уравнения служат решениями второго?

Задача 4. Найти все такие a, что у уравнения

$$y' - (y - x)^{3/4} + a = 0$$

существует решение, в каждой точке которого нарушается единственность.

Задача 5. Решить

$$x^2(y')^2 + 2(2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

Задача 6. Известно, что $A(t)$ — непрерывная матричная функция, причем для любого t собственные значения $A(t)$ действительны и не превосходят -1. Следует ли отсюда устойчивость нулевого решения линеной системы $\dot{x} = A(t)x$ при дополнительном предположении, что для любого t матрица $A(t)$– симметрическая?

Задача 7.

Нарисовать фазовый портрет автономной системы, соответствующей уравнению

$$\ddot{x} = x^3 + x^2 - 6x.$$

Задача 8. Исследовать поведение решения уравнения

$$y' = xy + 1$$

в зависимости от начальных условий x_0, y_0 и, в частности, установить, при каких начальных условиях решение стремится к $-\infty$, монотонно убывая при $x > x_0$.

Задача 9. Пусть

$$y'(x) = p(x)y(x) + f(x), \quad y(0) = y_0,$$

$$u' \geq p(x)u(x) + f(x), \quad u(0) = y_0, \quad 0 \leq x \leq M, \ p, f \in C[0, M).$$

Доказать, что $u(x) \geq y(x)$, $0 \leq x \leq M$.

Задача 10. Пусть $y(x)$ – решение задачи

$$y''' + p(x)y = 0,$$

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0, \ \ y''(x_0) > \ 0.$$

с непрерывной отрицательной на $[x_0, \infty)$ функцией $p(x)$. Доказать, что $y(x)$ возрастает на $[x_0, \infty)$.