Олимпиада по ОДУ 2017

Задача 1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^∞, а числовая последовательность x_j стремится к нулю. Все решения уравнения $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_j) = 0$ ограничены и продолжаемы на всю прямую. Следует ли отсюда, что решение этого уравнения с начальным условием $y(0) = 0$
а) продолжаемо на всю прямую?
б) ограничено?

Задача 2. Может ли быть несвязным множество точек $\bigcap_i^\infty \varphi(i, \infty)$ (ω – предельное множество), где $x = \varphi(t)$ – решения системы $\dot{x} = f(x)$, а $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение класса C^∞?

Задача 3. Укажите необходимое и достаточное условие на функцию $u \in \mathrm{C}^n(R)$, при котором она служит решением какого-либо линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_n(t)y = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

Задача 4. Пусть задана линейная автономная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Опишите все ненулевые решения x этой системы, для каждого из которых найдется такое решение y той же системы, линейно независимое с x, что в любой момент $t \in \mathbb{R}$ луч, натянутый на решение $x(t)$, поворачивается в точности в сторону вектора $y(t)$ (т.е. вектор $\dot{x}(t)$ лежит в плоскости векторов $x(t)$, $y(t)$, причем $\dot{x}(t) \cdot y(t) > 0$)?

Задача 5. Для уравнения

$$(y')^{2017} + (y')^{2016} = y^{2017} + y^{2016}$$

а) нарисовать интегральные кривые; б) выразить решение аналитически.

Задача 6.

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 4x - 4, & x > 0. \end{cases}$$

а) докажите, что уравнение $\varepsilon^2 \frac{d^2X}{dt^2} = f(X)$ при любом положительном ε имеет 1-периодическое по t и непрерывное по t, ε решение $X(t, \varepsilon)$.

б) Пусть такое решение удовлетворяет условиям

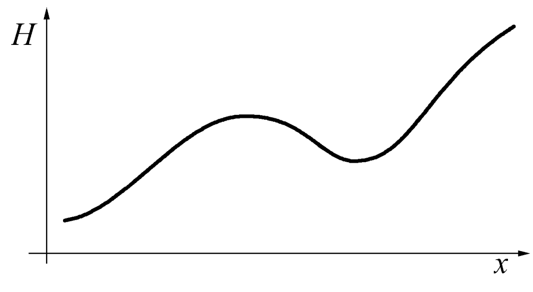
$$X'_t(0, \varepsilon) = X'_t(1, \varepsilon) = 0, \quad X(0.5, \varepsilon) > 0.$$

При каждом фиксированном значении $t \in [0, 1]$ найдите предел $p(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} X(t, \varepsilon)$.

Задача 7. Решить уравнение

$$y'(2x^2y - x) - 2xy^2 - y = 0.$$

Задача 8. Численно решая дифференциальное уравнение $H'' + F(H) = 0$ с известной функцией F, Гаврила получил график решения $H(x)$, показанный на рисунке.



Докажите, что в вычислениях Гаврилы есть ошибка.

Задача 9. Известно, что $y' + 2017y = f(x)$ и $f(x) \to 0$, $x \to \infty$. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

Задача 10. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого решения $\varphi = y(t)$ уравнения $\ddot{y} + \sin y = 0$, задающего периодическое колебание маятника в окрестности его нижнего положения равновесия $\varphi = 0$, найдется функция $\varphi = z(t)$, которая:

1) удовлетворяет для всех $t \geq 0$ условию $|\dot{z}(t) - \dot{y}(t)| < \varepsilon$;

2) для некоторых $t_1 > t_2$ и φ_0 принимает при $t \in [t_1, t_2]$ почти любое значение $\varphi \in [0, 2\pi) (\operatorname{mod} 2\pi)$ одинаковое число раз.