ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 2019

Задача 1. Решить уравнение

$$(3x+1)(y')^2 - 3(y+2)y' + 9 = 0.$$

Задача 2. Даны две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By, \\ \dot{y} = Cx + Dy \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + Dy, \\ \dot{y} = Ax + By. \end{cases} \tag{2}$$

Существуют ли такие действительные числа A, B, C, D, при которых системы (1) и (2) имеют особые точки следующих типов:
а) система (1) — седло, система (2) — дикритический узел;
б) система (1) — седло, система (2) — фокус;
в) система (1) — седло, система (2) — седло;
г) система (1) — центр, система (2) — фокус?

Задача 3. Известно, что в случае $n = 1$ верно утверждение: если правая часть уравнения $\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$, непрерывна и не принимает нулевых значений, то всё пространство $\mathbb{R}^n$ состоит из точек существования и единственности. Распространяется ли это утверждение на случай $n = 2$? Ответ обосновать.

Задача 4. Существует ли такая числовая функция $a \in \mathrm{C}^1([0,\infty))$, что у задачи

$$\ddot{y} + a(t)y = 0, \quad y(0) = 1$$

не имеет нулей:

а) любое решение;

b) хотя бы одно решение, но при дополнительном условии $a(t) > 0,\ t \geq 0$?

Задача 5. В плоскости параметров α, β изобразить множества устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$$

Задача 6. Решите систему

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)...(x_n - x_1)dx_1 = ... = (x_1 - x_n)(x_2 - x_n)...(x_{n-1} - x_n)dx_n.$$

Задача 7. Существует ли нетривиальное решение уравнения

$$y^{IV} + a(x)y = 0, \quad a(x) > 0, \quad a(x) \in C(\mathbb{R})$$

имеющее два двукратных нуля?

Задача 8. Пишется случайная матрица 2x2. Пусть её элементы — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Какой наиболее вероятный фазовый портрет соответствующей линейной системы? Какова его вероятность?

Задача 9. Всякое ли гладкое векторное поле на сфере, вложенной в R^3, можно непрерывно продолжить в шар, ограниченный этой сферой, без особых точек внутри?