МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

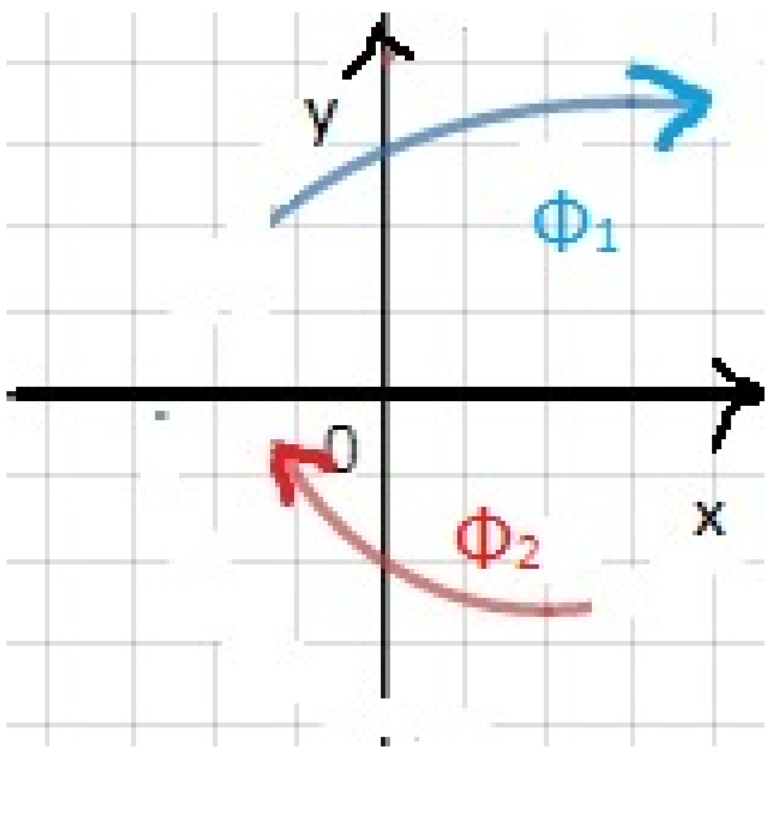
ЗАДАЧА №1

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 17:25.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 17:55.

На вебинаре студент по заданию преподавателя нарисовал фазовый портрет системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + By, \\ \dot{y} = Cx + Dy \end{cases}$$

с вещественными коэффициентами A, B, C, D. Из-за нестабильной работы интернета преподаватель увидел не весь фазовый портрет, а только части двух траекторий Φ_1 и Φ_2, изображённые на рисунке. При каких значениях A, B, C, $D \in \mathbb{R}$ преподаватель по увиденной части фазового портрета может утверждать, что студент нарисовал фазовый портрет неверно? Ответ обоснуйте.



МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №2

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 17:45.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 18:25.

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (a+5)\dot{x} = y, \\ a(a-1)\dot{y} = z, \\ (a+5)\dot{z} = -5x + y - z + t - a. \end{cases}$$

Найдите число вещественных решений этой системы, одновременно удовлетворяющих условиям

$$x(0) = 1 \qquad \text{и} \qquad y(0) = -a-5,$$

в зависимости от значения параметра $a \in \mathbb{R}$. Сами решения находить необязательно.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №3

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 18:15.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 18:45.

Приведите пример числа $n \in \mathbb{N}$, для которого существуют такие решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения

$$y^{(n)} + y = 0,$$

что множество нулей функции $y_1(x)$ бесконечно и совпадает со множеством нулей функции $y_2(x)$, однако тождество

$$y_1(x) \equiv C y_2(x)$$

не выполняется ни для какого $C \in \mathbb{R}$. Правильность приведённого примера обоснуйте.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №4

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 18:35.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 19:15.

Укажите какую-нибудь функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$, для которой уравнение

$$u'' + f(u) = 0$$

имеет такое монотонное решение $u(x)$, что

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x) = 4.$$

Правильность приведённого примера обоснуйте.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №5

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 19:05.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 19:45.

При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_1, \ldots, a_n \in C(\mathbb{R})$$

может иметь решение: **а)** $y = \sin^2 x$; **б)** $y = x \sin x$?
в) Изменятся ли ответы на вопросы пунктов а) и б) в случае постоянных коэффициентов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$?
Ответы на все вопросы обоснуйте.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №6

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 19:35.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 20:15.

Может ли определитель Вронского двух линейно независимых решений уравнения

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

коэффициенты которого a_0, a_1, a_2 — непрерывные функции, иметь бесконечно много нулей на некотором отрезке числовой прямой? Ответ обоснуйте.

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 30 апреля 2020 года

ЗАДАЧА №7

Условие этой задачи отправлено участникам олимпиады в 20:05.
Решение нужно прислать ответным письмом не позже 20:45.

Сколько интегральных кривых уравнения

$$y' = \frac{y^2 \cdot (1 + x^2)}{xy + 1}$$

имеют хотя бы одну вертикальную асимптоту? Ответ обоснуйте.