МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ОЛИМПИАДА 29 апреля 2021 года

1. По одномерной прямолинейной реке плавает нульмерный (точечный) пловец. В неподвижной воде пловец может плыть со скоростью не больше 1 в любом из двух направлений. Но в реке есть течение, которое всюду направлено в одну сторону, а скорость течения на расстоянии r от точки O реки равна $r^{2/3}$. Пловец стартует на расстоянии 1 от точки O выше её по течению. За какое наименьшее время он сможет доплыть до точки O? Сколько времени ему понадобится, чтобы затем вернуться обратно?

2. Пусть $x\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ — *непродолжаемое* решение системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x = (x_1,\, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad f \in C(\mathbb{R}^{1+2}).$$

Верно ли, что оно удовлетворяет:

а) условию $\lim\limits_{t\to+0} |x(t)| = \infty$;

б) хотя бы при одном $i \in \{1,\, 2\}$ — условию $\lim\limits_{t\to+0} |x_i(t)| = \infty$?

3. Дано дифференциальное уравнение:

$$a \cdot (y')^3 + (2 - a - a^2) \cdot (y')^2 + (a^2 - 2a - 2) \cdot y' + 2a = 0.$$

При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольший из углов между интегральными траекториями данного уравнения принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

4. Для некоторого ненулевого решения $y_0\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad p, q \in \mathrm{C}^1\big([0,\infty)\big), \quad t \geqslant 0,$$

существует при $y = y_0$ предел

$$\nu(y) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} N(y,t) = a,$$

где $N(y,t)$ — число нулей функции y на промежутке $(0,t]$.

а) Обязательно ли существует аналогичный предел для любого другого ненулевого решения y? Чему он может быть равен, если существует?

б) Тот же вопрос для уравнения 3-го порядка

$$\dddot{y} + p(t)\ddot{y} + q(t)\dot{y} + r(t)y = 0, \quad p, q, r \in \mathrm{C}^1\big([0,\infty)\big), \quad t \geqslant 0.$$

5. Рассматривается уравнение

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = f(t), \quad p, q, f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}).$$

а) Какое наибольшее число k линейно независимых решений может иметь это уравнение?

б) Одинаково ли это число для разных троек функций p, q, f?

в) Обязательно ли линейно независимые решения из такого набора служат решениями некоторого линейного однородного уравнения k-го порядка с непрерывными на $\mathbb{R}$ коэффициентами?

6. В какой системе координат квазилинейное уравнение

$$y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x^3$$

становится линейным (перестает быть «квази-»)?

7. Существует ли на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ точка $(x, y) \notin \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$, траектория $\{T^n(x,y)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ которой под действием диффеоморфизма

$$T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod 1$$

не всюду плотна на торе (т. е. замыкание которой не совпадает со всем тором)?