Олимпиада по дифференциальным уравнениям

Задача 1. Выразить в квадратурах общее решение уравнения $y'' - xy' - y = 0$.

Задача 2. При каких значениях μ нулевое решение уравнения

$$y' = y\left(\mu - y^2 \sin\frac{1}{y}\right)$$

(при $y = 0$ правая часть уравнения доопределена нулём) устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво?

Задача 3. Пусть y — максимально продолженное решение задачи Коши

$$y'(x) = x^{20} y(x)^{22}, \quad y(2022) = 1.$$

Найти наибольшее целое x, при котором не существует конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} (\underbrace{y \circ y \circ \cdots \circ y}_{n})(x).$$

Задача 4. Советский микробиолог Георгий Гаузе сформулировал принцип сосуществования двух биологических видов, занимающих одинаковую экологическую нишу.
Пусть $x(t), y(t)$ — численности двух видов, и их жизнь зависит от одного и того же ресурса. Каждая особь вида тратит на себя какое-то количество ресурса (причём прожорливость у каждого вида своя, обозначим их a и b, $a > 0, b > 0$), поэтому количество свободного ресурса в данный момент времени $r(t)$ равно $r(t) = r_0 - ax(t) - by(t)$. От этого изобилия зависит динамика роста численности каждого вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha_1 r(t) x(t) - \beta_1 x(t), \\ \dot{y}(t) = \alpha_2 r(t) y(t) - \beta_2 y(t). \end{cases}$$

То есть динамика складывается из рождаемости и естественной убыли. Рождаемость пропорциональна количеству свободного ресурса и количеству особей, убыль пропорциональна количеству. Коэффициенты α_i, β_i, обозначающие плодовитость и смертность каждого вида, положительны, причём $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$. Также считаем, что каждый из видов сам по себе жизнеспособен, то есть коэффициенты таковы, что при отсутствии соперника вид сам по себе не вымирает.
Задача — исследовать данную систему и выяснить, чем кончается сосуществование двух видов в одной экологической нише.

Задача 5. Существуют ли функции $p, q \in \mathrm{C}^1([0,\infty))$ и число $\alpha > 0$, для которых решениями уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad t \geq 0,$$

служат **сразу обе** функции $y_1(t) = \cos t^{2022}$ и $y_2(t) = \cos(t+\alpha)^{2022}$?

Задача 6. Верно ли, что для **любой** системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2),$$

любой области $G \subset \mathbb{R}^2$ и любой точки $x_0 \in G$ существует такое решение x этой системы, удовлетворяющее начальному условию $x(0) \in G$ и хотя бы для одного $\mathbf{t_0} > \mathbf{0}$ — условию $x(t_0) = x_0$?

Задача 7. Существует ли такое уравнение

$$y' = f(x,y), \quad f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2),$$

что начальному условию $y(0) = 0$ удовлетворяет **континуум** его решений, причём любые два y_1 и y_2 из этих решений в любой точке $x \neq 0$ принимают разные значения $y_1(x) \neq y_2(x)$?