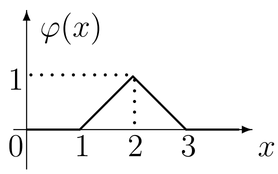
ОЛИМПИАДА

1. Рассмотрим смешанную задачу для полуограниченной струны

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad t > 0,\ \ x > 0,$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t\Big|_{t=0} = 0,$$
$$(u_x + \alpha u)\Big|_{x=0} = 0.$$



Имеет ли отраженная волна задний фронт, то есть будет ли расстояние от носителя решения до прямой $x = 0$ неограниченно возрастать при $t \to \infty$?

2. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u''_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x), \qquad t > 0,\ \ x \in \mathbb{R}^3,$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u(t,x) \not\equiv 0.$$

Может ли $\operatorname{supp} u(t,x)$ принадлежать цилиндру $\{(t,x) \mid \ t \in (0,\infty),\ x \in D\}$, где D – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$?

3. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в окрестности точки $\{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$;

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \frac{\mathcal{D}^\alpha u}{\alpha!}\Big|_{x=0} x^\alpha \quad —$$

разложение функции $u(x)$ в ряд Тейлора в точке $\{0\}$. Верно ли, что полиномы $P_i(x) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=i} \frac{\mathcal{D}^\alpha u}{\alpha!}\Big|_{x=0} x^\alpha$ – гармонические функции? Ответ обоснуйте.

4. Пусть $u(t,x)$ – решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$ при $t > 0$, $u(t,x) \in C^2(\Pi_+) \cap C(\overline{\Pi}_+)$, $\Pi_+ \equiv \{(x,t),\, t > 0\}$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ – ограниченная непрерывная функция, не равная тождественно нулю. Докажите, что не существует такого $T > 0$, при котором $u(t,x) \equiv 0$, если $T \leqslant t$. (Иначе говоря, нагретый стержень не может полностью "остыть" за конечное время.)

5. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $u(x)$ – собственная функция задачи Дирихле, то есть $\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0$, $u(x) = 0$ для $x \in \partial\Omega$, $\lambda = const$. Может ли множество $\sigma = \{x \mid u(x) = 0,\, x \in \Omega\}$ быть отрезком ℓ прямой линии, не имеющим общих точек с границей области Ω? Ответ обоснуйте.

6. Пусть K – единичный круг на плоскости с центром в точке $\{0\}$. Докажите, что существует такая последовательность гладких функций $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n(x) \in C^\infty(\overline{K})$, что $\Big\|\varphi_n\Big\|_{H^1(K)} \to 0$ при $n \to \infty$, но $\varphi_n(0) = 1$ для любых $n = 1, 2, \ldots$ (то есть функции из $H^1(K)$ не имеют "следа" в точке).

7. Пусть Ш – единичный шар в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, $\vec{v}(x)$ – такая вектор–функция в Ш, что

   1) $\vec{v}(x) = \nabla u(x)$, $u(x)$ – гладкая скалярная функция в Ш;
   2) $\operatorname{div} \vec{v}(x) = 0$ в Ш;
   3) если продолжить $\vec{v}(x)$ нулем в $\mathbb{R}^3$, то полученная в результате такого продолжения вектор–функция $\vec{w}(x)$ также удовлетворяет равенству $\operatorname{div} \vec{w}(x) = 0$ в $\mathbb{R}^3$ в смысле теории обобщенных функций. Найдите $\vec{v}(x)$.

8. Пусть $u(t,x)$ – решение здачи $u''_{tt} = u''_{xx}$ в Π, $\Pi \equiv [0,\pi] \times [0,\infty)$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ $\forall\, t > 0$, $u(0,x) = \varphi(x)$, $u'_t(0,x) = \psi(x)$, $\psi(x), \varphi(x) \in C_0^\infty[0,\pi]$. Мы наблюдаем движение струны с закрепленными концами в точке 1, то есть нам известна функция $u(t,1)$ при $t > 0$, но не абсолютно точно, а с точностью δ, где δ – любое положительное (но не равное нулю) число. Можно ли по такому наблюдению восстановить с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$? Ответ обоснуйте.