ОЛИМПИАДА

1. (2 балла) Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad \text{где} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

(Шар "взрывается"). Нарисуйте $u(t,r)$ в моменты времени $t=1$, $t=3$ (решение, разумеется, зависит только от $r=|x|$).

2. (2 балла) Функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи

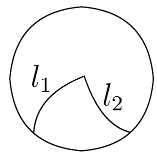
$$\ddot{u} + \dot{u} = u'' \qquad \text{на} \quad [0,\pi]\times[0,\infty),$$
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Верно ли, что $\Big|u(x,t)\Big| \to 0$ при $t\to\infty$? Ответ обоснуйте.

3. (5 баллов) Пусть $u(x,t)$ – гармоническая функция в цилиндре $Ц = \Omega\times[0,\infty)$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и $u=0$ на $\partial\Omega\times[0,\infty)$. Пусть также $\Big|u(x,t)\Big| \leqslant M$. Докажите, что $\Big|u(x,t)\Big| \to 0$ при $t\to\infty$.

4. (3+3 балла) Пусть A_1 и A_2 — подмножества функций в $C^\infty(K)$, K — единичный круг на плоскости, такие, что $\varphi\Big|_{x_1=0} = 0$ и $\varphi'_{x_1}\Big|_{x_1=0} = 0$ соответственно. Найдите коразмерности замыканий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ этих множеств в пространстве $H^1(K)$.

5. (5 баллов) Пусть K — единичный круг на плоскости (x_1,x_2), l_1 и l_2 — два отрезка гладких кривых, пересекающихся в точке O под ненулевым углом. Может ли кривая $l_1\cup l_2$ быть линией уровня гармонической функции? Ответ обоснуйте.



6. (5 баллов) Пусть Ω — область на плоскости, M — замкнутое множество в Ω и пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega\setminus M)$ совпадают на $\Omega\setminus M$. Докажите, что $\mu(M)=0$.

7. (3 балла) Рассмотрим краевую задачу

$$\ddot{u} = u'' + f(x,t) \qquad \text{в} \quad [0,\pi]\times[0,\infty),$$
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0, \quad u\Big|_{t=0} = \sin x, \quad u'_t\Big|_{t=0} = 0, \qquad \Big|f(x,t)\Big| \leqslant M.$$

Можно ли выбрать $f(x,t)$ так, чтобы $u(x,t)\equiv 0$ для всех $t > T_0$? Ответ обоснуйте.

8. (3 балла) Пусть $u(x)$ – гармоническая в шаре $Ш \equiv \Big\{|x|<1\Big\}$ функция,

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in \partial Ш \setminus x^*,$$

x^* — некоторая фиксированная точка на $\partial Ш$, и $\Big|u(x)\Big| < M$ в шаре $Ш$. Верно ли, что $u(x)\equiv 0$ в $Ш$? Ответ обоснуйте.

9. (4 балла) Может ли решение уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ иметь такую линию уровня: