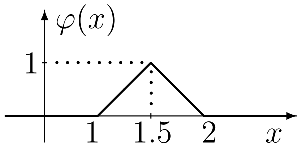
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2005

1. (3) Справедлив ли принцип максимума для уравнений (здесь $(t,x)\in\mathbb{R}^2$):
   а) $u_{tt}-u_{xx}+u=0$;
   б) $u_{tt}+u_{xx}+u=0$?

2. (2) Рассмотрим уравнение колебаний неоднородной струны
$$u_{tt}=a(x)\,u_{xx},\qquad a(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 2, & x\leqslant 0,\end{cases}$$
с начальными условиями
$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u'_t\Big|_{t=0}=0,$$
график функции $\varphi(x)$ имеет вид




Нарисуйте график решения в момент $t=5$.

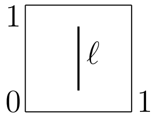
3. (3) Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в единичном квадрате $\square=[0,1]\times[0,1]$ на плоскости:
$$\Delta u=0\quad\text{в}\quad\square,$$
$$u\Big|_{x=0}=\sin y,\qquad u\Big|_{x=1}=\cos y,\qquad u'_y\Big|_{y=0}=u'_y\Big|_{y=1}=0.$$
Докажите, что $\Big|u(x,y)\Big|\leqslant 1$.

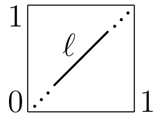
4. (2) Пусть $u(t,x)$ — решение уравнения
$$u_t-u_x+2u=0$$
в смысле теории обобщенных функций, равное гладким вплоть до границы функциям в областях $t>\varphi(x)$ и $t<\varphi(x)$ соответственно, и разрывное при $t=\varphi(x)$, $\varphi(x)$ — гладкая функция. Найдите $\varphi(x)$.

5. (5) Рассмотрим краевую задачу
$$u_t=u_{xx},\quad t\in\mathbb{R},\ \ x\geqslant 0,$$
$$u\Big|_{x=0}=\varphi(t),\qquad |u|\leqslant M\quad\text{при}\ \ t\in\mathbb{R},\ \ x\geqslant 0,$$
$\varphi(t)$ — ограниченная непрерывная функция. Единственно ли решение этой задачи?

6. (3) Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности
$$u_t=u_{xx},\qquad u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=1}=0,\qquad u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\in C_0^\infty[0,1].$$
Нам известна функция
$$\psi(x)=\int\limits_0^T u(t,x)dt.$$
Можно ли восстановить функцию $\varphi(x)$, зная $\psi(x)$?

7. (2+2) Функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению
$$u_{tt}-u_{xx}=0\qquad\text{в}\quad\square\setminus\ell,$$

а) 


б) 


$\square=[0,1]\times[0,1]$, $\ell$ — отрезок строго внутри $\square$. Возможно ли доопределить $u(t,x)$ до решения уравнения $u_{tt}-u_{xx}=0$ в $\square$ в случаях (а) и (б) соответственно?

8. (2) Пусть функция $u(t,x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ является решением уравнения
$$u_t-u_x=0$$
в смысле теории обобщенных функций. Верно ли, что существует $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$, такая, что
$$u(t,x)=f(t+x)?$$