ОЛИМПИАДА 2006

1. (2) Решите краевую задачу
$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad t>0, \;\; x>0,$$
$$u\big|_{t=0} = \sin x, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \qquad (u'_x + \alpha u)\big|_{x=0} = 0.$$

2. (3) Отрезок $[-1,1]$ охлаждается в точке $x=1$, т.е. $u(t,1)=-1$, а через точку $x=-1$ поступает постоянный поток тепла, т.е. $u'_x(t,-1)=1$. Функция распределения температуры $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$, начальное распределение температуры $u(0,x)=\varphi(x)$, $x \in (-1,1)$. Что происходит с точкой $x=0$: нагревается она или остывает?

3. (5) Пусть ограниченная измеримая функция $u(t,x)$ — обобщенное решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$ в $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $u(t,x) = f(t-x) + g(t+x)$, где f, g — ограниченные измеримые функции на $\mathbb{R}^1$.

4. (4) Функция $u(t,x)$ является решением краевой задачи
$$u'_t = u''_{xx}, \qquad x \in [0,1], \quad t \in (0,+\infty),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad u'_x(t,0) = u'_x(t,1) = 0.$$
Докажите, что для $u(t,x)$ имеет место оценка
$$\left\| u(t,x) - \int\limits_0^1 \varphi(x)dx \right\|_{H^1(D_t)} \leqslant M e^{-\pi^2 t} \left\| \varphi(x) \right\|_{L_2(D_0)},$$
где $D_t = \{t\} \times [0,1]$, постоянная $M>0$ не зависит от $\varphi(x)$.

5. (4) Справедлива ли теорема Лиувилля для решений в $\mathbb{R}^2$ уравнения
$$\Delta u + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + 2u = 0\ ?$$

6. (4) Пусть $K = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ — единичный круг на плоскости, и A — множество гладких функций на K, удовлетворяющих условию $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=0} = 0$. Найдите замыкание A в пространстве $H^1(K)$.

7. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши
$$u'_t = u''_{xx} + c\,u'_x, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,x) = \varphi(x),$$
где $\varphi(x)$ — гладкая функция, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = b$. Найдите $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,0)$.

8. 1) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности
$$u'_t = u''_{xx}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$
где $\varphi(x)$ — гладкая функция, имеющая n простых нулей $x_1, \ldots, x_n$, $\varphi'(x_j) \neq 0$. Может ли у решения $u(t,x)$ этой задачи количество нулей по переменной x при увеличении t
   а) (3) увеличиться?
   б) (3) уменьшиться?

   2) Хорошо известно, что задачи Коши для "обратного" уравнения теплопроводности
$$u'_t + u''_{xx} = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$
некорректна. Однако она разрешима, если $\varphi(x)$ — многочлен.
   а) (3) Докажите это.
   б) (5) Если многочлен $\varphi(x)$ n–й степени имеет n различных вещественных корней, то решение $u(t,x)$ при всех $t>0$ как функция от переменной x сохраняет те же свойства.

9. Пусть $u(t,x)$ и $v(t,x)$ — решения задач Коши

а) $\begin{cases} u'_t = u''_{xx}, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$ б) $\begin{cases} v''_{tt} = v''_{xx}, & t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ v\big|_{t=0} = \varphi(x), & v'_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$

Рассмотрим задачи, которые "заменяют" задачи Коши на краевые задачи в ограниченной области

а′) $\begin{cases} (u^N)'_t = (u^N)''_{xx} \quad \text{в} \quad [0,T]\times[-N,N], \\ u^N\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u^N(t,-N) = \varphi(-N), \quad u^N(t,N) = \varphi(N); \end{cases}$ б′) $\begin{cases} (v^N)''_{tt} = (v^N)''_{xx} \quad \text{в} \quad [0,T]\times[-N,N], \\ v^N\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad (v^N)'_t\big|_{t=0} = \psi(x), \\ v^N(t,-N) = \varphi(-N), \quad v^N(t,N) = \varphi(N). \end{cases}$

Докажите, что

а) (5) $u^N(t,x) \to u(t,x)$ при $N \to \infty$,
б) (2) $v^N(t,x) \to v(t,x)$ при $N \to \infty$.