Олимпиада по уравнениям с частными производными 2007 г.

1. (1) Найдите решение уравнения теплопроводности $u'_t = u''_{xx}$ в виде бегущей волны.

2. (4) Найдите явное решение задачи Коши
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial p}{\partial x} + x^2\,p, \qquad p(0,x) = 1.$$

3. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши
$$\frac{\partial u}{\partial t} = C(t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$
$\varphi(x)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = b$, $C(t)$ — гладкая строго положительная периодическая функция. Существует ли предел $u(t,x)$ при $t \to \infty$?

4. (3) Пусть $u(x) \in H^1(\square)$, где $\square = [0,1]\times[0,1] \in \mathbb{R}^2$. Функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, четно продолжается на прямоугольник $\Pi = [-1,1]\times[0,1]$. Докажите, что продолженная функция принадлежит $H^1(\Pi)$.

5. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

   а) (2) Докажите, что продолжение нулем $u(x)$ на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n)$.

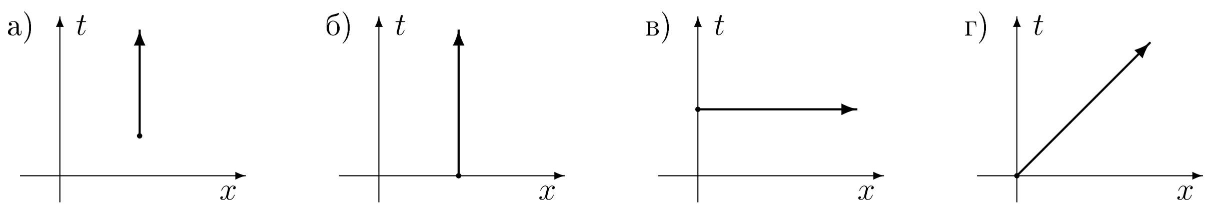
   б) (3) Верно ли обратное утверждение, именно: пусть $u(x)$ — такая функция на Ω, что ее продолжение на $\mathbb{R}^n$ нулем принадлежит $H^1(\mathbb{R}^n)$; можно ли утверждать, что $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$?

6. (3) Пусть $u(x), v(x) \in H^1(\Omega)$. Докажите, что $\max\big\{u(x), v(x)\big\} \in H^1(\Omega)$.

7. (4) Справедлива ли двусторонняя теорема Лиувилля для уравнения $\Delta u + a(x)\,u = 0$ в $\mathbb{R}^n$, где $a(x) < 0$ вне некоторой окрестности начала координат?

8. (3) Пусть $u(t,x)$ — решение краевой задачи
$$u''_{tt} = u''_{xx} + f(t,x), \qquad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = u'_t(0,x) = 0.$$
Известно, что $\big|f(t,x)\big|$ — неограниченная функция при $0 \leqslant t < \infty$, $x \in [0,1]$. Может ли $\big|u(t,x)\big|$ быть ограниченной на $[0,\infty)\times[0,1]$ функцией?

9. (2+2+2+4) Может ли решение задачи Коши для уравнения теплопроводности
$$u'_t = u''_{xx}, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \big|\varphi(x)\big| \leqslant const, \quad \big|u(t,x)\big| \leqslant const,$$
иметь линию уровня $\big\{u(t,x) = 0\big\}$ следующего вида:



10. (6) Тот же вопрос о решении задачи Коши для уравнения колебаний струны
$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$