УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2008

1. (1) Решите краевую задачу
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad [0,\pi]\times[0,\pi],$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=\pi} = \sin x + 3\sin 8x.$$

2. (2) Единственно ли обобщенное (т.е. понимаемое в смысле соответствующего интегрального тождества) решение краевой задачи
$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y), \qquad u(x,y)\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \quad f(x,y)\in L_2(\Omega), \quad \Omega = (0,1)\times(0,2)?$$

3. Рассматривается следующая задача
$$\Delta u = 0, \quad x_1 > 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}^1, \qquad u\big|_{x_1=0} = \varphi(x_2), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_{x_2}).$$
   а) (1) Единственно ли решение этой задачи?
   б) (2) Существует ли решение этой задачи при произвольной функции $\varphi(x_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1_{x_2})$?

4. а) (2) Рассматривается краевая задача
$$\Delta u + k\cdot C(x,y)u = 0 \quad \text{в} \quad K = [0,1]\times[0,1],$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=1} = \varphi(x),$$
$\varphi(x)$, $C(x,y)$ — гладкие функции. Можно ли утверждать, что решение этой краевой задачи единственно при всех значениях $k\in\mathbb{R}^1$?

   б) (4) Тот же вопрос для краевой задачи
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + k\cdot C(x,y)u \quad \text{в} \quad K\times[0,T],$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=1} = \varphi(x), \qquad u\big|_{t=0} = \psi(x,y).$$

5. (3) Рассматривается краевая задача
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x>0, \quad t>0,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t\big|_{t=0} = 0, \quad x>0, \qquad (u'_x + \alpha\, u)\big|_{x=0} = h(t), \quad t>0.$$
Можно ли так выбрать функцию $h(t)$, чтобы начиная с некоторого момента времени $t_0 > 0$ заданная точка x_0 ($x_0 > 0$) находилась бы в покое (т.е. $u(x_0,t)=0$ для $t>t_0$)?

6. (4) Рассмотрим колеблющуюся струну, отклонение которой от положения равновесия $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$\ddot u = u'', \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2.$$
Пусть (x_0,t_0) — заданная точка в $\mathbb{R}^2$, и мы можем измерить величину $u(x,t)$ с произвольной точностью ε в узком (ширины 2α по переменной x) произвольной высоты $2h$ (по переменной t) прямоугольнике $\Pi_{\alpha,h} = [-\alpha,\alpha]\times[-h,h]$. Можно ли по данным этих измерений с заданной степенью точности восстановить $u(x,t)$ в точке (x_0,t_0)?

7. Рассмотрим уравнение
$$y'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$$
в классе $D'(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}^1$.
   а) (2) Покажите, что ряд в правой части определяет обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R})$.
   б) (4) Покажите, что существует $y(x)$ — решение приведенного выше уравнения, являющееся регулярной обобщенной функцией. Нарисуйте его график.

Всего 25 баллов