УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2009

1. (2) Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ в полуплоскости $y > 0$.

2. (2) Имеет ли решение (при произвольной непрерывной функции φ на ∂K, K — единичный квадрат на плоскости $\mathbb{R}^2$) задача Дирихле
$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad \text{в} \quad K, \qquad u\big|_{\partial K} = \varphi(x,y), \qquad u \in C^2(K) \cap C(\overline{K})?$$

3. (4) Пусть $v_n(x,y)$ — последовательность решений задачи Дирихле
$$\Delta v_n = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad v_n\big|_{\partial\Omega} = \varphi_n(x,y),$$
Ω — шар в $\mathbb{R}^n$, $\varphi_n \in C(\partial\Omega)$, $\|v_n\|_{L_2(\partial\Omega)} \to 0$. Можно ли утверждать, что $\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \to 0$?

4. (1+1+3) Рассмотрим уравнения
$$u_{tt} = -u_{xx}, \qquad u_{tt} = u_{xx}, \qquad u_t = u_{xx}.$$
Какие из этих уравнений имеют периодические по x и t и отличные от постоянной решения, определенные на всей плоскости?

5. (4) Решите в явном виде задачу Коши
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u, \qquad u\big|_{t=0} = 1.$$

6. (3) Докажите, что для решения задачи
$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in (0,\pi),\\ &u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=\pi} = 0,\\ &u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)\end{aligned}$$
выполняется оценка
$$\int_0^\pi (\alpha u^2 + \beta u_x^2 + \gamma u_t^2)\,dx \leqslant C \int_0^\pi (\varphi_x^2 + \psi^2)\,dx,$$
где $C = \max(\alpha+\beta, \gamma)$, α, β, γ — положительные постоянные.

7. (3+1) Пусть $u(x,y)$ — решение задачи
$$u_{xx} + u_{yy} = 1 \quad \text{в} \quad K = (0,2)\times(0,2), \qquad u\big|_{\partial K} = 0.$$
а) Укажите такое целое N, что $N < u(1,1) < N+1$.

б) Укажите такое вещественное R, что $|u_x^{(2009)}(1,1)| < R$.

8. (4) Рассматривается решение уравнения
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \qquad \text{в} \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$
такое, что
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0, \qquad u \not\equiv 0.$$
Доказать, что $u(t,x,y)$ не может сохранять знак на множестве $(0<x<1)\times(0<y<\pi)$ при сколь угодно больших t.

9. (2) Рассматривается уравнение
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0.$$
Может ли $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = 0$ равномерно на $0 \leqslant x \leqslant 1$?